

A KÉPLÉKENYSÉGTAN TERMODINAMIKAI ALAPJAIRÓL

VÁN PÉTER

1. BEVEZETÉS

Ebben az írásban a képlékeny és a reológiai, (hibás szóhasználattal viszkoelasztikus) anyagmodellek kapcsolatát tárgyaljuk a nemegyensúlyi termodinamika alapján. Annak érdekében, hogy mondanivalónk könnyebben érthető és áttekinthetőbb legyen röviden összefoglaljuk a legfontosabb fogalmakat a klasszikus rugalmasságtanból, illetve a klasszikus és a hagyományos termodinamikai háttérű képlékenységtanból.

Többféle képlékenységi elmélet áttekintése után részletesen vizsgáljuk a Ziegler-től eredő klasszikus termodinamikai képlékenységlelméletet, amely a legelterjedtebb és számos szempontból a legjobbnak tekinthető. Itt a képlékeny deformáció egy speciális belső változó, ami csökkenti a termosztatikai feszültséget, vagyis az egyensúlyi állapotban lévő közeg feszültségét. A képlékenységi feltételt az Onsager-féle vezetési együtthatóknak a belső változó sebességének abszolút értékétől való függése hordozza.

Ahogy a csúszási sűrűlódás kontinuumokra történő általánosítása vezet a viszkozitáshoz, és speciálisan izotrop folyadékok esetén a Navier-Stokes-egyenlethez, illetve szilárd testek esetén a különféle viszkoelasztikus elméletek alapegyenleteihez, ugyanúgy kaphatjuk a tapadási sűrűlódás kontinuummechanikai általánosításaként a képlékenység különféle elméleteit. Éppen ezért a termodinamikai elmélet ismertetése előtt — és a klasszikus és termodinamikai képlékenység különbségének teljesebb megvilágítása céljából — kitérünk a sűrűlódás és csillapítás termodinamikai leírásaira.

A termodinamikai képlékenységet teljesen a nemegyensúlyi termodinamika fogalomrendszerén belül tárgyaljuk, eltérően a szokott, a mechanikában kialakult fogalmakra alapozott tárgyalástól. A nemegyensúlyi termodinamika a képlékeny alakváltozásokkal járó folyamatok időbeli lefolyásának leírását teszi lehetővé. A képlékeny és a rugalmas deformáció időbeli változása kúszási és feszültségrelaxációs jelenségekkel együtt leírható. Homogén testek példáján — közönséges differenciálegyenletek megoldásával — mutatjuk meg a disszipatív hatások numerikus regularizáló hatását.

2. A KÉPLÉKENYSÉGI ELMÉLETEK RÖVID ÖSSZEFOGLALÁSA

2.1. A klasszikus képlékenységlelmélet. A képlékenység elméleteiben a teljes alakváltozást rugalmas és képlékeny részre szokták osztani. A nagy alakváltozások elméleteiben a teljes alakváltozást a rugalmas és a képlékeny alakváltozás szorzataként, vagy összegeként állítják elő. A kis deformációs elméletekben mindkét feltevés a deformációk összegződésére vezet. Mi a továbbiakban a kis deformációs elmélettel

foglalkozunk, ezért a teljes ϵ_{ij} deformációt (strain) ϵ_e^{ij} rugalmas és ϵ_p^{ij} képlékeny komponensek összegére bontjuk:

$$\epsilon^{ij} = \epsilon_e^{ij} + \epsilon_p^{ij}, \quad (1)$$

ahol mindkét deformáció másodrendű tenzor. A későbbiekben megmutatjuk, hogy egy termodinamikai belső változó milyen feltételekkel értelmezhető képlékeny deformációként. Itt és a továbbiakban a tenzorokat alsó és felső indexekkel jelöljük, és az egy szorzaton belül ismételt indexek összegzést jelentenek, az Einstein-féle összegzési szabálynak megfelelően. Általában ügyelünk az alsó és felső indexek megfelelő használatára is.

A rugalmas feszültséget a termosztatikából ismert módon termodinamikai potenciálfüggvényből származtatjuk. Ez a termodinamikai alapállás megfelel a mechanikában hiperrugalmasságként ismert elméletcsaládnak. Mivel az entrópia és rajta keresztül a termodinamikai potenciálok létezése a második főtétel részeként természettörvény, ezért termodinamikai szempontból az ilyen elméletek kitüntetettek. Mechanikai elméletekben a leggyakrabban használt termodinamikai potenciál az F szabadenergia-függvény (illetve sűrűség). Ennek segítségével

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \epsilon_e^{ij}}. \quad (2)$$

A vonatkozó Gibbs-reláció $dF = SdT + \sigma_{ij}d\epsilon_e^{ij}$, ahol S az entrópia, σ_{ij} a feszültség és T a hőmérséklet. Ideálisan rugalmas anyagok esetén

$$\sigma_{kl} = C_{ijkl}\epsilon_e^{ij}, \quad (3)$$

ahol a C_{ijkl} negyedrendű rugalmassági tenzor állandó, továbbá a szabadenergiából történő származtathatóság követelménye miatt $C_{ijkl} = C_{klij}$. Ideálisan rugalmas izotróp anyag esetén $C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \nu\delta_{ik}\delta_{jl}$ és a szabadenergia

$$F(\epsilon_e^{ij}) = \frac{\lambda}{2}((\epsilon_e)_i^i)^2 + \mu(\epsilon_e)_{ij}\epsilon_e^{ij}. \quad (4)$$

Itt λ és μ a Lamé-állandók, δ_{ij} pedig a másodrendű egységtenzor. A képlékenységi határát egy ún. folyási felület (yield surface) határozza meg a feszültségtérben. Ezt a *folyásfüggvény* segítségével adják meg, a 0 értékéhez tartozó szintfelülettel:

$$f(\sigma_{ij}, \dots) = 0.$$

Az f függvény más fizikai mennyiségektől is függhet. Képlékeny alakváltozás akkor következik be, ha a feszültség eléri a folyásfelületet. Képlékeny alakváltozás közben ott is marad. A folyásfelületen "belül", ahol $f(\sigma_{ij}, \dots) < 0$, az anyag rugalmasan viselkedik, a folyási felületen kívüli rész, ahol $f(\sigma_{ij}, \dots) > 0$, nem érhető el. A folyási függvény nincs egyértelműen meghatározva, egyetlen szintfelülete lényeges, ezért a fenti tulajdonságokkal minden monoton függvénye rendelkezik. Többnyire implicit módon, de feltételezik továbbá, hogy a folyási felület időben állandó, azaz

$$\dot{f} = 0. \quad (5)$$

Ez tulajdonképpen rögzíti a folyási határ valamelyik változójának evolúciós egyenletét.

A képlékeny deformáció változását a *folyási törvény* (flow rule) adja meg, amit általában a $g(\sigma_{ij}, \dots)$ *képlékeny potenciál* segítségével írják fel, feltételezve, hogy a

képlékeny deformáció változása merőleges a képlékeny potenciál szintfelületeire:

$$(\epsilon^p)^{ij} = \Lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (6)$$

ahol Λ pozitív skalár képlékeny szorzó. Ha $f \equiv g$, akkor *kapcsolt vagy asszociatív folyásról* (associated flow), illetve normalitásról beszélünk. A képlékeny potenciált sokszor egy segédváltozóval lenullázzák a folyásfelület azon pontjaiban, ahol a képlékeny folyás történik, felhasználva a szintfelületes meghatározás miatti határozatlanságot.

A képlékeny deformáció mértékének meghatározására változatos elképzelések vannak. Leggyakrabban feltételezik, hogy a folyásfüggvény egy ξ *keményedési (hardening) paramétertől* függ. Ha a keményedési paraméter egyedül a képlékeny deformáció függvénye, akkor ξ kiküszöbölhető a folyásfüggvényből, és *deformációs keményedésről* (strain hardening) beszélnek. Máskor ugyan a keményedési paraméter nem küszöbölhető ki, de rá vonatkozóan fejlődési egyenleteket írhatunk fel, például $\dot{\xi} = x(\sigma_{ij}, (\epsilon^p)^{ij}, \xi, (\dot{\epsilon}^p)^{ij})$ formában, ahol az egyenlet jobb oldalán álló x függvény mutatja a fejlődési egyenlet szokásos változóit. A keményedési paraméter legtöbbször skalár. Ha a keményedés változását éppen a képlékeny teljesítmény okozza, azaz $x = \dot{W}^p = \sigma_{ij}(\dot{\epsilon}_p)^{ij}$, akkor beszélünk *munkakeményedésről* (work hardening).

Mindezek a feltételek együtt megadják a képlékeny szorzót és megadják a rugalmassági paraméterek megváltozott, képlékeny tartományban érvényes értékeit is. Nézzünk erre két példát.

a) *Ideális és nem kapcsolt képlékenység* esetén, amikor a folyási függvény csak a feszültségtől függ, azaz $f = f(\sigma_{ij})$:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \dot{\epsilon}_e^{kl} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \left(\dot{\epsilon}^{kl} - \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} \right). \quad (7)$$

Ahol az előbb már bevezetett negyedrendű rugalmassági tenzort az általános nemlineáris esetben a szabadenergia második deriváltjaként $C_{ijkl} = \frac{\partial^2 F}{\partial \epsilon_e^{ij} \partial \epsilon_e^{kl}}$ módon értelmezzük. Ebből (5) alapján:

$$\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \dot{\epsilon}^{kl}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} C_{mnr s} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{rs}}}. \quad (8)$$

Ezek után a feszültség megváltozása

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \dot{\epsilon}^{kl} - \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ab}} C_{abcd} \dot{\epsilon}^{cd}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} C_{mnr s} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{rs}}} \right) C_{ijkl} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}}. \quad (9)$$

Kiemelve $\dot{\epsilon}^{ij}$ -t leolvashatjuk a képlékeny viselkedés tartományában érvényes módosított rugalmassági modulust:

$$\hat{C}_{ijkl} = C_{ijkl} - \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ab}} C_{abkl}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} C_{mnr s} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{rs}}} \right) C_{ijcd} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{cd}}. \quad (10)$$

Deformációs keményedés esetén a folyási felület a feszültségnek is függvénye, ezért írhatjuk, hogy

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \epsilon_p^{ij}} \dot{\epsilon}_p^{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \epsilon_p^{ij}} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} = 0.$$

Itt behelyettesítettük a (6) folyási törvényt. Ezután akár eljáráhatunk hasonlóan is, mint az előbb, de esetleg kényelmesebb lehet a feszültségnövekményekre alapozva számolni. Azaz a képlékenységi szorzó meghatározására a fenti egyenlőségből adódó következő formulát használjuk:

$$\lambda = -\frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij}}{\frac{\partial f}{\partial \epsilon_p} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij}}{h}, \quad (11)$$

ahol a $h = -\frac{\partial f}{\partial \epsilon_p} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}$ kombinációt *keményedési modulusnak* hívják. Ezután a rugalmassági tenzor helyett annak inverzét, a c^{ijkl} merevségi tenzort fogjuk használni, amelyre definíciójából következően igaz, hogy:

$$\epsilon_e^{ij} = c^{ijkl} \sigma_{kl}.$$

Természetesen a merevségi tenzor is származtatható potenciálból. Ennek segítségével írhatjuk, hogy

$$\dot{\epsilon}^{ij} = c^{ijkl} \dot{\sigma}_{kl} - \frac{1}{h} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl}. \quad (12)$$

Ezért aztán a képlékeny tartományban érvényes merevségi tenzort könnyedén kiolvashatjuk:

$$\hat{c}^{ijkl} = c^{ijkl} + \frac{\frac{1}{h} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}}}{\frac{\partial f}{\partial \epsilon_p^{mn}} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{mn}}}. \quad (13)$$

A klasszikus képlékenység elméletében csak erre van szükség, a feszültség és a deformáció kapcsolatának úgynevezett *növekményes* (incremental) formáira, mint (9), vagy (12). A végelelem-programoknak ennyi elég. Annak ellenére, hogy látszólag időderiváltak szerepelnek benne (9) vagy (12) csak nagyon korlátozott feltételekkel vonatkoztatható valódi időbeli változásokra, a rugalmassági állandók csökkenését adja meg adott feszültség szint elérésekor.

Összefoglalva az eddigieket, egy klasszikus képlékenységlelmélet feltételezi, hogy

- (1) A deformáció felbontható képlékeny és rugalmas komponensekre.
- (2) A képlékeny viselkedés határát kritikus feszültségekkel jellemezhetjük, Ennek megfelelően a feszültségtérben definiált folyásfüggvényt egy szintfelületével adjuk meg, $f(\sigma_{ij}, \dots) = 0$ módon. Ennek definíciója tartalmazza a képlékeny deformáció irreverzibilitását, azaz azt a feltevést, hogy a képlékeny deformáció egyúttal maradó deformáció, ha egyszer fellépett, akkor magától nem csökken.
- (3) A képlékenységi határ az (5) összefüggés szerint állandó.
- (4) Létezik a $g(\sigma_{ij}, \dots)$ képlékeny potenciál. Azaz a képlékeny deformáció növekményeinek viszonyát a (6) folyási szabály alapján - eléggé speciális módon - jellemezhetjük (ez a Perzyna-elmélet lényege).
- (5) Létezik valamilyen szabály a képlékeny deformáció nagyságának meghatározásához (pl. deformációs képlékenyedés, vagy a keményedés fejlődési egyenlete).

Mindezek előtt, a (2) összefüggés formájában adott a termodinamikai háttér - hiszen a szabadenergia létezése az entrópia bevezethetőségét feltételezi - az egyensúlyi feszültség és a rugalmas deformáció viszonyának megadására.

Termodinamikai szemmel vizsgálva a fenti feltevérendszer, érdekes, hogy a többi empirikusan megadandó függvény és közvetlen tapasztalati szabály mellett

a (2) összefüggést, a szabadenergia, azaz tulajdonképpen az entrópia létezésének feltevését is gyengíteni szokták valamilyen feszültség-deformáció függvény feltételezésével, annak potenciálból történő származtathatósága nélkül. Erre a motivációt még Truesdell és Noll [1, 3] adta a hiporugalmassági elképzelésükkel, akik így illesztették a reológiai jelenségeket a mechanikához. A hiporugalmasság a feszültség növekményére vonatkozóan posztulál függvénykapcsolatot

$$\dot{\sigma}_{ij} = H_{ij}(\sigma_{ij}, \dot{\epsilon}_{ij}). \quad (14)$$

Ennek mintájára jött létre Kolymbas hipoképlékenységnak nevezett elmélete. Ebben elhagyjuk a képlékeny potenciált is és a képlékeny deformáció meghatározására is egy ilyen függvényt keresünk (ami természetesen nem lineáris és legfeljebb az anyag szimmetriái szorítják meg) [4]. A hiporugalmasságban és hipoképlékenységekben a termodinamikai követelményeket csak nagyon nehézkesen adhatjuk meg. A továbbiakban látni fogjuk, hogy a (14)-hoz hasonló, a feszültség időderiváltját tartalmazó egyenleteket viszont a nemegyensúlyi termodinamika segítségével, matematikailag is következetesen és könnyedén levezethetünk.

2.2. A termodinamikai képlékenységtan elmélete. A klasszikus képlékenységtan elmélete a termodinamika második főtételéhez való viszonya nem tisztázott. Sok anyagra nem tudjuk, hogy a folyási és képlékeny potenciálra pontosan miféle követelményeket kellene még kikötnünk, hogy képlékenyedő anyagokkal se lehessen másodfajú peripétum mobilét létrehozni, illetve a képlékeny anyagfüggvényeket tartalmazó kontinuummechanikai modellek termodinamika egyensúlya aszimptotikusan stabil legyen. A klasszikus képlékenységtan alapján még az sem világos, hogy a mechanikai hiszterézis egyáltalán irreverzibilis jelenség-e. Számos termodinamikai elmélet létezik különféle hiányosságokkal.

Az első jelentős termodinamikai elmélet, Rice belső változós elképzelése [5] a második főtételhez köti, abból bizonyítja a normalitást. Ez ma is az egykristály-képlékenységtan termodinamikai alapja, minden egyes diszlokációhoz különböző belső változókat rendelve.

A makroszkopikus képlékenységtan klasszikus termodinamikai elmélete egyetlen belső változóra - a képlékeny deformációra - alapuló sajátos nemegyensúlyi termodinamikai elmélet. Az elmélet Hans Ziegler-től ered [6], és a francia iskola [7, 8] dolgozta ki (Duhem műveiből is már kikövetkeztethető [2].)

A termodinamikai képlékenységtan elméletben a képlékeny deformációt termodinamikai belső változónak tekintjük és fejlődési egyenletét az entrópiatermelés egy részeként azonosított disszipációs függvényből származtatjuk. A vezetési egyenletek a termodinamikai áramokra bevezetett disszipációs potenciál formájában jelennek meg. A disszipációs potenciál egyben képlékeny potenciál és folyási függvény is — a termodinamikai képlékenységtan alapkiépítésben kapcsolt elmélet. A legfontosabb posztulátuma, hogy a disszipációs potenciál a termodinamikai áramoknak nem kvadrátikus, hanem elsőrendű homogén függvénye (ideális képlékenységtan esetén). A termodinamikai képlékenységtan természetesen módon tartalmazza a viszkozus hatásokat is, az ideális képlékenységtan egyfajta szinguláris eset, a potenciálok differenciálhatóságát sértő módon jelentkezik. Emiatt az ideális képlékenységtant magába foglaló, a klasszikus képlékenységtan formalizmusát pontosan azonosító tárgyalása speciális matematikai eszközök bevezetését igényli (pl. Legendre-Fenchel transzformáció). A nem ideális - viszkoképlékeny - elmélet alapegyenletei az ideális képlékenységtan egyenletek egyfajta regularizációját eredményezik [9].

Ziegler - elég nehezen követhető - érvelése és nevezetes ortogonalitási feltétele termodinamikai kiindulóponton alapul [6, 10]:

Általában az entrópia változása reverzibilis és irreverzibilis részre osztható:

$$dS = Td_rS + d_iS, \quad \text{ahol,} \quad d_iS \geq 0. \quad (15)$$

Tegyük fel, hogy az entrópia csak az U belső energiától és a_k belső változóktól függ. Ekkor a Gibbs-reláció a következő formában írható:

$$dU = TdS - A_k da_k = Td_rS - A_k da_k + Td_iS. \quad (16)$$

Az utolsó tag - mint irreverzibilis járulék - folyamatsebességek függvénye és ezt tekinti Ziegler a *disszipációs függvénynek*, azaz $\Phi(U, \dot{U}, a_k, \dot{a}_k) = Td_iS$. Ezután Ziegler feltételezi, hogy

- (1) az irreverzibilis járulék csak a belső változókhoz kötődik és ezért $Td_iS = F_k da_k$, ahol F_k általánosított disszipatív erőket jelöl,
- (2) a disszipatív erők párhuzamosak a disszipációs függvény növekedési irányával a nemegyensúlyi állapotterben, azaz a következő kapcsolatban vannak

$$F_k = \nu \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{a}_k}, \quad (17)$$

ahol ν pozitív skalár értékű függvénye a Φ változóinak.

Ezek után - még a homogén rendszerekre vonatkozó termodinamikai keretek között - Ziegler kiaknázza (15) egyenlőtlenségét, a tulajdonképpeni entrópiatermelést is, amely az eddigiek alapján

$$F_k da_k \geq 0$$

formában írható. Intuitív módon onsageri erőnek tekinti da_k -t és meghatározandó áramnak F_k -t, és egyrészt megállapítja, hogy

- a vezetési mátrix antiszimmetrikus része nem járul hozzá az entrópiatermeléshez, azaz a termodinamika - az ő szóhasználatával - nem mond semmit a "giroszkópikus erőkről".
- nemdisszipatív esetben, azaz ha $d_iS = 0$, az F_k általánosított disszipatív erők merőlegesek a da_k áramokra. Ez a híres Ziegler-féle *ortogonalitási feltétel*, a klasszikus képlekenységtan termodinamikai megalapozásának sokat vitatott sarokköve. Az ortogonalitási feltétel csak a nem disszipatív esetben következménye a fenti gondolatmenetnek.

Az első (1) feltevést Ziegler semmivel sem próbálja indokolni, annyira természetesnek érzi. A másodikat, (2)-t, később duális terekre vonatkozó (nem túl meggyőző) gondolatmenettel támogatja meg (lásd [10]) illetve egy plauzibilisnek látszó variációs elvet, a Maximális Entrópiatermelés Elvét posztulálja helyette (vigyázat, ez nem azonos a Prigogine-féle Minimális Entrópiatermelés Elvével, ami vegyész és biológus körökben népszerű). Valójában úgy tűnik Ziegler felismerte, hogy ezzel a feltevéssel tudja a klasszikus képlekenységelméletek fogalomrendszerét a nemegyensúlyi termodinamikával összekapcsolni, mert a disszipációs potenciál ekkor természetes módon a folyási és a képlekenységi függvényhez köthető.

Ziegler javaslatát azután Maugin (illetve a francia iskola) többféle irányban kiaknázza a mechanikai alapú elméletek termodinamikai általánosításával (töredezés, károsodás, anyagi sokaságok, stb.) [11, 8, 12]. Ő mechanikai alapon - Hamilton-típusú variációs elvvel - próbálja indokolni Ziegler feltevéseit. Fontos felismerése, hogy az Onsager-szimmetria miatt a Ziegler által még többféle változórendszerben

meghatározott disszipációs függvénye mögött felismeri és azonosítja a klasszikus Rayleigh-féle disszipációs potenciálokat.

Összefoglalva: a Ziegler-féle termodinamikai képlékenységtan elmélet a klasszikus képlékenység feltételeit egyszerűsíti az előző fejezet 2-5 pontjainak alábbi módosításával:

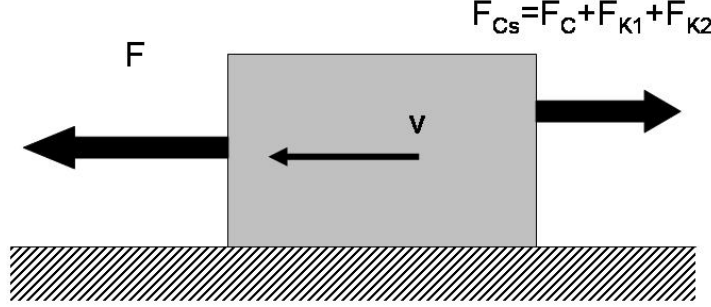
- Disszipációs potenciálként értelmezi a képlékenységi függvényt, és illeszti a nemegyensúlyi termodinamika elméletéhez.
- Lehetővé teszi a képlékeny alakváltozásra vonatkozó fejlődési egyenlet termodinamikai (vagy variációs mechanikai) alapon történő származtatását [13, 14].

A fenti feltevésrendszer világosan megalapozza, illetve termodinamikai elmélet keretei közé illeszti a kapcsolt képlékenységet, és lehetőséget teremt az egyéb termodinamikai kölcsönhatásokkal együttes tárgyalására. Ilyenek például a viszkózus hatások is figyelembe vevő viszkoplaszticitás, károsodás, stb. A termodinamikai háttér biztosítja a robosztus — azaz a paraméterek, kezdeti és peremfeltételek váltásására nem érzékeny — és stabil numerikus eljárások létezését. A képlékenységen túlmenően is a hiszterézis jelenségének megfelelő leírását adja.

Egy, az előzőektől lényegesen különböző, de termodinamikailag következetes megközelítést ad Asszonyi, Ván és Szarka [15]. Ők a képlékenységi feltételt az entrópiafüggvény változójának tekintik és ennek segítségével adják meg a rugalmassági állandók képlékenység következtében bekövetkező változását. Alapfeltevésük, hogy a képlékenységi feltétel munka alapú. Ez a megközelítés alkalmas viszkoelasztoplasztikus, képlékeny-reológiai növekményes egyenletek közvetlen levezetésére és a deformáció időbeli változásának leírására reológiai és képlékeny hatások esetén. A képlékenységi feltétel közvetlen használata viszont azzal jár, hogy a rugalmassági modulus a képlékenységi határ átlépésekor ugrásszerűen változik, lényegében úgy, ahogy C_{ijkl} és (10) különbözik. Az időbeli változások differenciálegyenleteken alapuló leírásakor viszont ez a deformáció ugrásszerű változását okozza, ami fizikailag irreális, és ezért további feltételekkel kell kiküszöbölnünk. Az elmélet kiterjesztetőségét nem-kapcsolt képlékenység leírására nem vizsgáltuk.

A kapcsolt képlékenység azonban nem jó modellje a talajoknak és köveknek (dilatancia), nem ad leírást a szöglethatásra, és nem magyarázható vele a lágyulás (softening) jelensége [16, 17]. A három probléma közül az első kérdéskör, azaz a dilatancia leírásával kapcsolatos nehézségek köre tűnik a legalapvetőbbnek. A dilatancia azt jelenti, hogy nyírási képlékeny alakváltozás térfogatnövekedést okoz - minden napos jelenség sűrű szemcsés anyagokban. Amint majd látni fogjuk, a kapcsoltság (asszociativitás) alapvető termodinamikai feltételekhez köthető, így feloldása feltehetőleg szükségessé teszi a klasszikus termodinamikai képlékenység általánosítását. Képlékenység-mechanikai oldalról — ha nem vesszük figyelembe a második főtételt —, akkor könnyű dolgunk van: már említettük, hogy a folyásfüggvény és a képlékeny potenciál megkülönböztetése vezet eredményre. Ha viszont legalább nagyjából meg akarjuk tartani a termodinamikai kereteket csak néhány általánosítást ismerünk.

Ristinmaa és Ottosen [18] két részre osztják a belső változókhoz konjugált termodinamikai áramokat, és mindkét halmazhoz disszipációs potenciált feltételeznek, illetve gyártanak. A többféle potenciállal valójában megsértik a termodinamikai kereteket. Viszont így levezethetők szöglethatások (amikor a folyási függvény szintfelülete törlik) és nem-kapcsolt képlékenység is, többek között Duvout-Lions jellegű. A dinamikai folyásfelületre vonatkozó javaslatuk viszont visszaállítja a klasszikus



1. ábra. Csúszó, súrlódó csillapított mozgású mechanikai-termodinamikai test. Valójában mechanikailag tömegpont, de a pontmechanikai hagyományoknak megfelelően merev testként szemléltettük.

képlékenység lazább - és a a második főtétellel tisztázatlan viszonyú - önkényes feltevéseit [19], ezzel gyakorlatilag kiküszöböli a termodinamikai megközelítés előnyeit.

Houlsby (és talán Collins) hiperképlékenységnak nevezett elméletét a belső változókra vonatkozó kinematikai kényszerek teszik nem-kapcsoltta [20]. A továbbiakban kifejtett — tisztán termodinamikai — megfontolásokhoz (és a Ziegler-féle elgondolások lényegéhez) ez áll legközelebb.

3. A SÚRLÓDÁS TERMODINAMIKÁJA

Tekintsünk egy vízszintes talajon F külső erővel mozgatott m tömegű testet, amelyre súrlódási és csillapító erők hatnak (1. ábra). Az elemi fizikából jól ismert módon háromféle közegerőt szoktunk feltételezni a mozgás fékezőjeként.

- Az sebesség nagyságától független Coulomb-féle súrlódási erőt

$$|F_C| = \alpha = \mu N = \text{áll.}, \quad (18)$$

- a sebességgel arányos közegellenállást

$$|F_{K1}| = \beta v, \quad (19)$$

- és a sebesség négyzetével arányos közegellenállást

$$|F_{K2}| = \gamma v^2. \quad (20)$$

Ezek mind a mozgást fékező erők, ezért irányuk a sebességgel ellentétes. Vagyis egy dimenzióban a teljes fékező erő pontosabb formája:

$$F_{Cs} = F_C + F_{K1} + F_{K2} = -\alpha \frac{v}{|v|} - \beta v - \gamma v|v|. \quad (21)$$

A fenti mozgásra vonatkozó differenciálegyenlet pedig a következő lesz:

$$m\ddot{x} = F + F_{Cs} = F - \alpha \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} - \beta \dot{x} - \gamma \dot{x}|\dot{x}|. \quad (22)$$

A csillapító erők azonban nemcsak a mozgást fékezik, hanem egyúttal disszipatívák. Munkájuk melegíti a testet és környezetét. Ez utóbbi tulajdonság termodinamikai keretek között válik érthetővé és egyúttal levezethető mozgást fékező természetű. Tehát vegyük észre, hogy az (1) ábrán egy termodinamikai rendszert látunk, egy környezetével kapcsolatban álló homogén termodinamikai testet.

A termodinamikai tárgyalásban a konstitutív mennyiségekre vonatkozó megszorításokat kaphatjuk meg. Ennek első lépéseként az alapmérlegeket írjuk fel. Az impulzusmérleg esetünkben az előbbiekből felírt (22) egyenlet, de benne a rendszer és környezet kapcsolatát leíró, csillapító erő konstitutív mennyiség, amit a második főtétel követelményeinek megfelelően szeretnénk előírni:

$$m\ddot{x} = F + F_{Cs}. \quad (23)$$

Tegyük fel továbbá, hogy a tömegpont E energiáját csak a külső F erő munkája változtatja, annak hiányában megmaradna. Tehát

$$\dot{E} = F\dot{x}. \quad (24)$$

Látni, fogjuk, hogy ebből a feltevésből — termodinamikai keretek között — következik, hogy csillapító erők munkája csak a tömegpont belső energiáját növeli. Gondolatmenetünkben az egyszerűség kedvéért nem foglalkozunk a környezet energiamérlegével. A tömegpont U belső energiája definíció szerint a E energiájának és a kinetikus és potenciális energiájának különbsége, azaz

$$U = E - m\frac{\dot{x}^2}{2}.$$

Az entrópia a belső energia függvénye, belső energia szerinti deriváltja pedig a hőmérséklet reciproka. Éppen ezért a (24) energiamérleg és a (23) impulzusmérleg felhasználásával kapjuk, hogy

$$\dot{S}(U) = \frac{1}{T}\dot{U} = \frac{1}{T}(\dot{E} - m\dot{x}\ddot{x}) = -\frac{\dot{x}}{T}(m\ddot{x} - F) = -\frac{1}{T}F_{Cs}\dot{x}. \quad (25)$$

A második főtétel értelmében pedig az entrópia növekszik,

$$\dot{S} = -\frac{1}{T}F_{Cs}\dot{x} \geq 0, \quad (26)$$

tehát a csillapító erő ellentétes irányú kell legyen a sebességgel. Ez a formula kínálja a termodinamikai erők és áramok azonosítását is. A sebességet a mozgás meghatározza. A csillapító erő viszont a test és a környezet viszonyát megadó függvény, tehát ez lesz a meghatározandó termodinamikai áram. Az egyenlőtlenség értelmében, a csillapító erő, mint konstitutív mennyiség csak a sebesség függvénye lehet, ami pedig jelen esetben független változóként termodinamikai erő. A termodinamikai és mechanikai elnevezések erre a furcsaságára, vagyis hogy a csillapító erő termodinamikai szempontból áramnak tekintendő, a kontinuummechanikai tárgyalásban már felhívtuk a figyelmet [21]. A kontinuumok esetén sebességgradiens bizonyult termodinamikai erőnek, itt pedig a sebesség (illetve a sebesség és a hőmérséklet hányadosa). Felhívjuk a figyelmet, hogy a sebesség itt a sűrűdő felületek közötti relatív sebesség és a fenti tárgyalás - megfelelően általánosítva - túllép a termostatikán és a mozgó testek közönséges termodinamikájához tartozik. A mozgó homogén testek

termodinamikája a mechanika és a termodinamika egyesítésének fontos eleme, számos régi és új megoldatlan és megoldatlannak hitt problémával [22, 23].

Azonnal láthatjuk, hogy a kontinuumok esetén szokásos szigorúan lineáris erő-áram kapcsolat csak egyik, a sebességgel arányos, fajtáját adja a jól ismert csillapítási erőknél. A Coulomb- súrlódás és a sebesség négyzetével arányos csillapítás szintén megfelel a (26) egyenlőtlenségnek, a következő módon:

$$F_{Cs} = -L(\dot{x})\dot{x} = -\left(\beta + \alpha\frac{1}{|\dot{x}|} + \gamma|\dot{x}|\right)\dot{x} \quad (27)$$

Az erő-áram kapcsolat nemlineáris, a sebességtől, mint termodinamikai erőttől függ az L vezetési együttható. A második főtétel egyenlőtlensége megköveteli, hogy az α, β, γ együtthatók ne legyenek negatívak. Az entrópia növekedésének feltételéből következtettünk a csillapító erő irányára, utólag igazolva fékező tulajdonságát. A klasszikus irreverzibilis termodinamika a Fourier-hővezetés, Fick-diffúzió, vagy például a Navier-Stokes-egyenlet levezetésénél szigorúan lineáris (állandó), vagy kvázilineáris (alapváltozóktól függő) erő-áram kapcsolatot feltételez. Itt most példát láthatunk ettől általánosabb, nemlineáris vezetési egyenletre, ráadásul egy nagyon egyszerű és jól ismert jelenségkör esetére.

A fenti (27) általános csillapítási anyagtörvény és a belőle következő (22) differenciálegyenlet azonban fizikailag nem teljesen felel meg az elvárásainknak és a mindennapi kísérleti tapasztalatnak, ugyanis nem ad számot a tapadási súrlódásról. Tegyük fel ugyanis, hogy a tömegpontra ható erőt egyenletes sebességgel növeljük, azaz legyen $F = Vt$, ahol V a terhelési sebesség és t az idő. Az egyszerűség kedvéért legyen továbbá $\gamma = 0$. Ekkor látjuk, hogy megoldandó lenne a

$$m\dot{v}(t) = Vt - \alpha\frac{v(t)}{|v(t)|} - \beta v(t)$$

differenciálegyenlet a $v(0) = 0$ kezdeti feltétellel. A matematikai feladat azonban így, a további fizikai feltevések nélkül határozatlan, illetve fizikailag rossz eredményt ad. Egyrészt a Coulomb-súrlódási tag $t = 0$ -beli értékét rögzítenünk kell, másrészt fel kell tételeznünk, hogy a súrlódási erők nem gyorsítják a tömegpontot, azaz például előírni, hogy a kezdeti feltétel legyen $v(\alpha/V) = 0$, a sebesség növekedése csak a Coulomb súrlódási erő elérése után kezdődik meg. Vagyis a differenciálegyenlet a következő formában pontosabb fizikai modell:

$$m\dot{v}(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } Vt < \alpha, \\ Vt - \alpha\frac{v(t)}{|v(t)|} - \beta v(t), & \text{ha } Vt \geq \alpha. \end{cases} \quad (28)$$

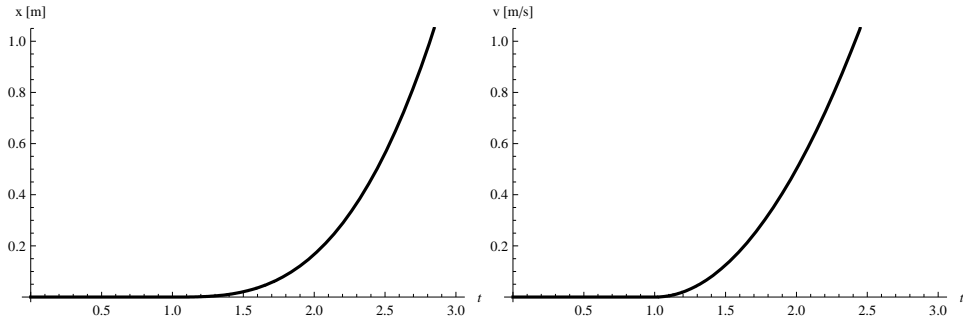
Vegyük észre, hogy egy kritikus erő jellegű feltételt adtunk meg, a képlékenység klasszikus elméletéhez hasonlóan. A differenciálegyenlet megoldásait a 2-3. ábrákon szemléltettük.

Egy másik, trükkösebb módon viszont a tapadás feltételét eleve tartalmazza termodinamikai vezetési törvény. A második főtétel egyenlőtlenségének megoldását ugyanis nemcsak (27)-hez hasonló, hatványsorszerű formában kereshetjük. Tegyük fel ugyanis, hogy

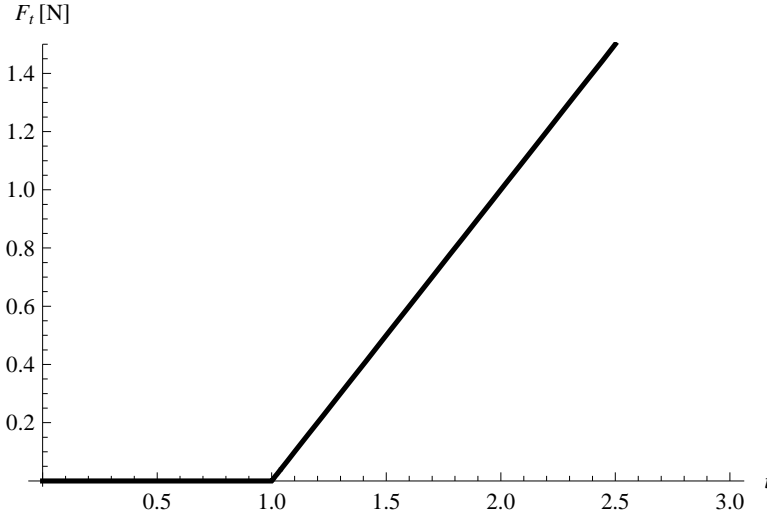
$$F_{Cs} = -\hat{L}(F_{Cs})\dot{x} = -(\hat{B} + \hat{A}|F_{Cs}|)\dot{x}, \quad (29)$$

vagy ezzel lényegében ekvivalensen

$$\dot{x} = -L(\dot{x})F_{Cs} = -(B + A|\dot{x}|)F_{Cs}. \quad (30)$$



2. ábra. Az elmozdulás és a sebesség időfüggése a (28) differenciálegyenlet szerint, $m = 1\text{ kg}$, $V = 1\text{ m/s}$, $\alpha = 1\text{ N}$, $\beta = 0\frac{\text{kg}}{\text{s}}$ paraméterértékekkel számolva. A kritikus tapadási súrlódási erő eléréséig a test nem mozdul el és sebessége is nulla.

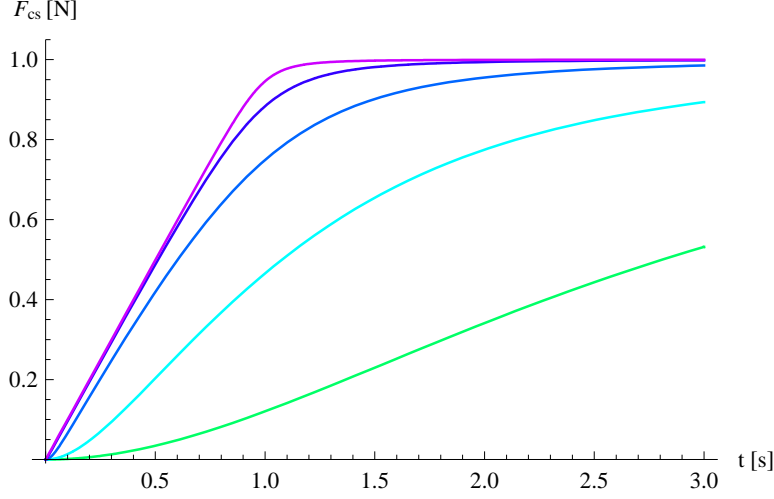


3. ábra. A teljes erő, azaz a (28) differenciálegyenlet jobb oldalának időfüggése, a 2. ábra paramétereivel.

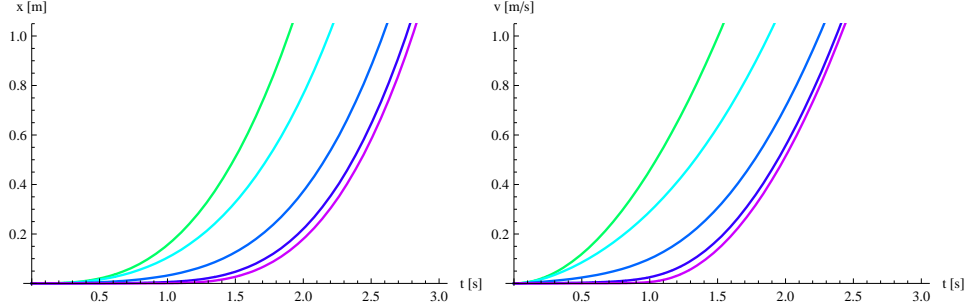
Pontosabban, fenntartva a függvénykapcsolatok előre rögzített formáját, azaz hogy $F_{Cs}(\dot{x})$ határozatlan függvényt keresünk, azt írhatjuk, hogy

$$F_{Cs} = -L(\dot{x})\dot{x} = -\frac{\beta\dot{x}}{1 + \beta|\dot{x}|/\alpha}. \quad (31)$$

A fenti formulákban $\hat{A}, \hat{B}, A, B, \alpha = 1/A$ és $\beta = 1/B$ anyagi paraméterek. A második főtétel egyenlőségét anyagi tulajdonságként, tehát a folyamatoktól (azaz jelen esetben \dot{x} -től) függetlenül megkövetelve, egyik fenti paraméter sem lehet negatív. Ha $1 \gg \beta|\dot{x}|/\alpha$, akkor $F_{Cs} \approx -\beta\dot{x}$. Ha $1 \ll \beta|\dot{x}|/\alpha$, akkor $F_{Cs} \approx -\alpha\dot{x}/|\dot{x}|$. Tehát kis sebességek esetén a sebességgel arányos a súrlódási erő, nagyobb sebességek esetén állandó. Egyenletesen növekvő erő hatásának kitett súrlódással mozgó



4. ábra. A csillapítási erő időfüggése. $m = 1\text{ kg}$, $V = 1\text{ m/s}$, $\alpha = 1\text{ N}$, $\beta = \{0.3, 3, 30, 300, 3000\} \frac{\text{kg}}{\text{s}}$. A legfelső, legszögletesebb görbéhez tartozik a legnagyobb $\beta = 3000 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$ érték. Nagy β esetén a súrlódási erő a terhelőerővel együtt növekszik, majd állandó értéket vesz fel.



5. ábra. Az elmozdulás és a sebesség időfüggése az 1. ábra paramétereivel számolva. A legfelső, görbéhez tartozik a legkisebb $\beta = 0.3 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$ érték. Nagy β esetén a test nem mozdul el és sebessége nagyon kicsi amíg a terhelés el nem éri az $F = \alpha$ határt.

tömegpont mozgásegyenlete tehát

$$m\dot{v}(t) = Vt - \frac{\beta v(t)}{1 + \frac{\beta}{\alpha}|v(t)|}. \quad (32)$$

Ez az együtthatók és az időskála megfelelő beállításával pontosan az elvárt tapadási-csúszási súrlódásos viselkedést eredményezi (4-5 ábrák). Az előző, klasszikus súrlódásra vonatkozó (28) differenciálegyenlethez képest (32) láthatóan számot ad a mozgás kezdetéről, csak $\beta \rightarrow \infty$ esetén kapjuk vissza az előző egyenlet megoldásait, illetve (28) éles feltételét.

Másrészt viszont ami az előnye ennek a modellnek, az egyúttal a hátránya is. Ugyan az éles átmenet helyett egy, a β paraméterrel hangolható, tompított állócsúszó (merev-képlékeny) átmenetet kapunk, de a test már az erőhatás kezdetétől fogva mozog egy kicsit. A fizikai képünk is ennek megfelelően változik: ez a fajta sebességgel arányos csillapítás kis sebességek esetén érvényes.

A sűrűlódás jelenségének fenti nagyon egyszerű modelljét szemléltetésnek szántuk. Nem vettük figyelembe az erő irányát és a nyomóerő hatását sem. A jelenségkörnek azonban ezeken felül is számos további olyan vonatkozása van, amelynek nincs megfelelő termodinamikai leírása [24, 25]. A sűrűlódási konstitutív törvények termodinamikai megszorításainak vizsgálata önmagában is érdekes, mert elkülöníti a jelenségkör univerzális és anyagfüggő vonatkozásait. Az első lépéseket ebben az irányban Verhás írása jelenti [26]. Valódi anyagi paraméterek azonosítása a kontaktmechanikában (a sűrűlódási, gördülési és ütközési tulajdonságok vizsgálatakor) önmagában is fontos, ráadásul a képlékenységi elméletek mélyebb megértéséhez és továbbfejlesztéséhez vezethet. (30)-(31) vezetési egyenletekhez tartozó erő-áram kép, azaz az egyenletek felállítása és ennek megfelelően az általánosításának iránya is különböző, de a kapott mozgásegyenletek ekvivalensek. (29) nem ekvivalens az utóbbiakkal, de a képlékenység irodalmában mégis elsősorban ez a forma terjedt el. Az utolsó fejezetben látni fogjuk, hogy a tapadási viselkedést tükrözi, nagyon hasonló megoldásokra vezet, mint (30)-(31).

4. A REOLÓGIA TERMODINAMIKAI ELMÉLETE - KIS DEFORMÁCIÓK

4.1. Mérlegek. A klasszikus képlékenységlelméletek termodinamikai megalapozottságának hiánya különösen a reológiával történő összevetés fényében szembetűnő. A termodinamikai reológia egyenletei és egész anyagelmélete - azaz a konstitutív egyenletek származtatási módja - ugyanis világos módon a második főtételre alapul.

A reológia gyakorlatban leginkább használt alapmodelljei az empirikus alapon származtatott skalár, lineáris elemek ad hoc kapcsolásából adódnak. Az ilyen 'félempirikus' modellezés teljesítőképessége azonban korlátozott, ugyanis általában nem anyagmodellekről van szó bennük, hanem inkább körülménymodellekről, mert paramétereik függenek a körülményektől (pl. terhelési feltételektől, irányoktól és sebességektől). A valódi anyagi paraméterek és modellek keresése vezetett az objektivitást (vonatkoztatási rendszertől való függetlenséget) és a termodinamikai követelményeket érvényesítő elméletek kidolgozásához. Hiába egyszerűek a klasszikus reológia skalár lineáris egyenletei, ha érvényességük korlátozott volta miatt a megfelelő paramétereket mindig újra és újra (esetleg speciális gépekkel) meg kell mérnünk. Van, amikor ez lehetetlen vagy költségesebb, mint egy megfelelően megbízható, kevésbé körülményfüggő anyagmodell használata. Ezért az általános elvi követelményeknek is megfelelő, éppen ezért sokkal szigorúbb keretekben kidolgozott modellek iránti igény nem csak esztétikai, hanem végső soron gyakorlati, gazdaságossági követelmény.

A reológia két alapjelensége a kúszás és a relaxáció. Mechanikai testet ugrásszerűen megterhelve és a terhelést ezután állandóan tartva a deformáció ugrásszerű kezdeti változás után fokozatosan veszi fel állandósult értékét: ez a kúszás. Mechanikai testet ugrásszerűen deformálva és a deformációt állandó értéken tartva a feszültség fokozatosan veszi fel állandósult értékét: ez a (feszültség)relaxáció. Mindkét jelenség magyarázata a rugalmasságtanon túlmutat és viszkoelaszticitás, hipoelaszticitás nevek alatt találhatóak meg őket a mechanikai irodalomban. A nehézséget

általában a két alapjelenség egy modell keretein belül történő, egységes értelmezése jelenti.

Az elvi, többek között termodinamikai követelményeknek megfelelő első elmélet, a már említett, Truesdell és Noll nevéhez köthető, hiporugalmasság, amely feltételezi, hogy a feszültségtenzor nemcsak a deformáció, hanem a deformáció időderiváltjának is függvénye. Azonban a termodinamikai potenciálok létezése nem dobható el következmények nélkül, a hiporugalmasság elmélete túlságosan laza, ezért könnyen vezet rossz anyagfüggvényekre.

Az első, termodinamikailag igazán megfelelő, nagy deformációkra vonatkozó és objektív időderiváltakat használó, belső változókon alapuló reológiai elméletet Verhás dolgozta ki [27], Kluitenberg [28, 29] úttörő munkáira alapozva. E szerint az elmélet szerint a relaxáció és a kúszás egyenrangú és az ezeket egyszerre tartalmazó alapmodell, a Poynting-Thomson-féle ún. standard modellt egyetlen belső változó segítségével megkaphatjuk termodinamikailag minimálisnak tekinthető további feltételekkel.

Az alábbiakban röviden összefoglaljuk Verhás elméletét, kis deformációk esetére szorítkozva. Az elméletnek többféle nagy deformációs kiterjesztése is létezik, amelyek az objektivitás követelményét is figyelembe veszik. Ezeknek az elvi szempontból teljesnek tekinthető elképzeléseknek azonban a fent említett egyszerű reológiai alapjelenségeken túlmutató, kísérletekkel történő összevetése máig nem teljes; több probléma megoldásra vár. Megjegyezzük, hogy a reológiának jelenleg *nincs* olyan modellje - sem olyan, amely megfelel a fenti két elvi követelménynek (az objektivitásnak és a termodinamikai következetességnek), sem más módon -, amely minden fő reológiai kísérlet (egyszerű nyírás, viszkozitás, nyírási relaxáció, nyírási szünet, stb...) során kielégítő egyezést mutatna a mérésekkel.

Minden képlékeny és reológiai modell felállításakor az alapmérlegek felírásából és entrópiaprodukció levezetéséből indulunk ki. Esetünkben az entrópiaprodukció kiszámításához a tömeg-, lendület- és energiamérlegeket kell figyelembe vennünk.

A tömeget megmaradónak tekintve kapjuk, hogy

$$\dot{\rho} + \rho \partial_i v^i = 0, \quad (33)$$

ahol ρ a sűrűség, v^i a sebességmező, a pont pedig a szubsztanciális időderiváltat jelöli. Az előzőekhez hasonlóan indexes írásmódot alkalmazunk. A lendületmérleg formája pedig a következő lesz, ha eltekintünk a külső, térfogati erőktől, amelyek nem játszhatnak szerepet az anyagegyenletek levezetésénél:

$$\rho \dot{v}^i - \partial_j t^{ij} = 0^i. \quad (34)$$

Itt t^{ij} a feszültségtenzor. Feltételezzük, hogy a közegben nincs belső impulzusmomentum, tehát a feszültségtenzor szimmetrikus: $t^{ij} = t^{ji}$. A teljes energia mérlege

$$\rho \dot{e} + \partial_i q_t^i = 0, \quad (35)$$

ahol e a teljes energia fajlagos értéke, q_t^i pedig az áramsűrűsége. Egykomponensű egyszerű mechanikai kontinuumok - elsősorban folyadékok - esetén a belső energia a teljes és a kinetikus energia különbsége. Ezt a definíciót használtuk az előző fejezet sűrűlódásra vonatkozó megfontolásaiban is. A rugalmasságtanban a mechanikai energiát általában a (Helmoltz-féle) szabadenergia segítségével kötik a termodinamikai követelményekhez. Reológiai rendszerekben feltételezik, hogy a mechanikai hatást az anyagban végbemenő strukturális változások késleltetik. Ezt a memória-, illetve

tehetetlenségi jelenséget egyetlen szimmetrikus másodrendű tenzor dinamikai változóval vesszük figyelembe. Most a belső energiát a teljes energia és a más energiafajták (kinetikus, rugalmas) különbségeként fogjuk értelmezni. Mint látni fogjuk, ez egyszerűsítéseket jelent a tárgyalásmódban és könnyen megmutatható, hogy izoterm esetben ekvivalens a hagyományos, Verhás által is alkalmazott megoldással, ahol az entrópiát egészítik ki a dinamikai (vagy belső) változók kvadratikussal [30]. Az ideálisan rugalmas izotrop kontinuum fajlagos rugalmas energiája kis deformációk esetén

$$e_{rug} = \frac{\lambda}{2}(\epsilon_i^i)^2 + \mu \tilde{\epsilon}^{ij} \tilde{\epsilon}_{ij}, \quad (36)$$

ahol λ és μ a Lamé-állandók, $\tilde{\epsilon}^{ij} = \epsilon^{ij} - \epsilon_k^k/3 \delta^{ij}$ pedig a deformáció nulla nyomú része (ϵ_i^i a nyoma indexes jelöléssel).

A dinamikai változót ξ^{ij} -vel jelöljük és hatását figyelembe vesszük a teljes energia meghatározásakor. Feltételezzük, hogy járuléka az eddigi energiafélékhez hasonlóan additív és független, formája pedig a kinetikus energiához hasonlóan - nem véletlenül - kvadratikussal. Ebből következően az e_B belső energia

$$e_B = e - \frac{v^2}{2} - e_{rug}(\epsilon^{ij}) - e_{din}(\xi^{ij}). \quad (37)$$

Az első két tagot, a teljes és a kinetikus energia különbségeként meghatározott szokásos belső energiát e_b -vel jelöljük:

$$e_b = e - \frac{v^2}{2}. \quad (38)$$

A belső, dinamikai változókat nem a belső energiát, hanem csak az entrópiát módosító módon szokás figyelembe venni (lásd pl. [30, 31]). A kétféle megközelítés egyenértékű, illetve a hőmérséklet szerepét illetően az energiát módosító javaslat fizikailag világosabb. Ez a belső változóhoz köthető kiegészítő energia jelzi, hogy a változó segítségével modellezett hatásnak tehetetlensége van. Ha a tehetetlenségi hatások mikroszkopikus, strukturális mechanizmusát is ismernénk, akkor célszerű lenne bevezetni a tehetetlenséget jellemző, belső változóhoz kötődő tömegszerű együttthatót. Ennek hiányában a Morse-lemma értelmében izotrop anyagra a belső változóval reprezentált anyagi kinetikus energia járulék általánosan tiszta négyzetes formában írható, mert a skálát nincs okunk bármihez kötni, azaz:

$$e_{din}(\xi^{ij}) = \frac{1}{2} \xi^{ij} \xi_{ij}. \quad (39)$$

A hagyományos e_b belső energia fluxusára, azaz konduktív áramsűrűségére vonatkozóan pedig a következő (szokásos) összefüggést feltételezzük

$$q^i = q_t^i - t^{ij} v_j. \quad (40)$$

Ekkor az e_b belső energia mérlege

$$\rho \dot{e}_b + \partial_j q^j = t^{ij} \partial_j v_i. \quad (41)$$

4.2. Entrópia és mérlege. Az entrópiamérleg felírásakor az entrópiasűrűség változóinak megállapítása, illetve a konduktív entrópia-áramsűrűség formájának megtalálása az alapvető feladat. Klasszikusan, gázok és folyadékok esetén ezek az extenzív változók sűrűségei. A kontinuummechanikában a belső energia sűrűsége és valamilyen objektív deformációmérték a leggyakoribb választási lehetőség. Kis deformációs közelítésben ezek egyenértékűek. Az előbbieken már kiválasztottuk az entrópia változóit, és mindet a belső energián keresztül vettük figyelembe, azaz

$s(e_b, \epsilon^{ij}, \xi^{ij}) = \hat{s}(e_B)$. Ennek megfelelően (36)–(39) felhasználásával a Gibbs-reláció a következő:

$$de_B = de_b - (\lambda \epsilon_k^k \delta^{ij} + \mu \tilde{\epsilon}^{ij}) d\epsilon_{ij} - \xi^{ij} d\xi_{ij} = T ds + (t_s)^{ij} d\epsilon^{ij} - \xi^{ij} d\xi_{ij}. \quad (42)$$

Itt $(t_s)^{ij} = \frac{\partial e_{rug}}{\partial \epsilon^{ij}} = \lambda \epsilon_k^k \delta^{ij} + 2\mu \tilde{\epsilon}^{ij}$ a termosztatikai feszültségtenzor, T a hőmérséklet. Innét leolvasható (illetve tulajdonképpen az intenzív mennyiségeket és rajtuk keresztül az entrópiát a parciális deriváltjain keresztül definiálja), hogy

$$\frac{\partial \hat{s}}{\partial e_B} = \frac{\partial s}{\partial e_b} = \frac{1}{T}, \quad \frac{\partial s}{\partial \epsilon^{ij}} = -\frac{1}{T} \frac{\partial e_{rug}}{\partial \epsilon^{ij}} = -\frac{(t_s)^{ij}}{T}, \quad \frac{\partial s}{\partial \xi^{ij}} = -\frac{1}{T} \frac{\partial e_{din}}{\partial \xi^{ij}} = -\frac{\xi_{ij}}{T}.$$

Ezek a parciális deriváltak a termosztatikai intenzív mennyiségeknek felelnek meg. A belső változónk a szokásos értelemben nem biztos, hogy extenzív (általában ennek a tulajdonságnak nincs nagy jelentősége belső változókra), de a hozzá tartozó entrópiaderivált nulla volta definiálja a termodinamikai egyensúlyt. Mivel ennek értéke a fenti utolsó formulából láthatóan ξ_{ij} -vel arányos, ezért a belső változó egyúttal *Verhás-féle dinamikai szabadsági fok* is, mert termodinamikai egyensúlyban értéke nulla. Dinamikai szabadsági fokok lehetnek például a kiterjesztett termodinamikában független változóként bevezetett termodinamikai áramok [32, 31], vagy bizonyos értelemben a relatív impulzus is [33].

Az entrópia konduktív áramsűrűsége a klasszikus választás szerint a hőáramsűrűség és a hőmérséklet hányadosa: $j^i = q^i/T$. Míg az entrópia változóinak kiválasztása a fizikai modellezés része, az entrópia áramának formája a modern kontinuumtermodinamika módszereivel kiszámolható. Itt most ezt a levezetést nem adjuk meg, mert egy hosszabb matematikai módszer (pl. Liu- vagy a Coleman-Noll-eljárás) alkalmazásával csak a jól ismert szokásos eredményre jutnánk. Általában bizonyítható, hogy lokálisan egyensúlyi, elsőrendűen gyengén nemlokális irreverzibilis termodinamikában — azaz a mi esetünkben is — egykomponensű közegekre az alaptermék és az entrópiamérleg egyenlőtlenségének következményeként az entrópiaáramsűrűség általában a hőáramsűrűség és a hőmérséklet hányadosa [34].

Az entrópiaprodukció ezek után a következő:

$$\begin{aligned} \rho \dot{s} + \partial_j (j_s)^j &= \rho \dot{s}(e_b, \epsilon^{ij}, \xi^{ij}) + \partial_j \frac{q^j}{T} = \\ &= -\frac{1}{T} (\partial_j q^j - t^{ij} \partial_j v_i) - \frac{(t_s)^{ij}}{T} \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{\xi_{ij}}{T} \dot{\xi}_{ij} + \partial_j \frac{q^j}{T} = \\ &= \frac{1}{T} (t^{ij} - (t_s)^{ij}) \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{\xi_{ij}}{T} \dot{\xi}_{ij} + q^i \partial_i \frac{1}{T} \geq 0. \end{aligned} \quad (43)$$

Itt felhasználtuk a kis deformációk esetén a sebességgradiensre érvényes összefüggést:

$$\partial_i v_j = \dot{\epsilon}_{ij}. \quad (44)$$

Ezek után a mechanikai folyamatokra szorítkozva feltételezzük, hogy a hőmérsékleteloszlás homogén a kontinuumban, vagy a hőáramsűrűség nulla (izoterm, illetve adiabatikus folyamatok). Ekkor a fenti formula utolsó tagja nulla és az energiadiSSIPáció, azaz az entrópiaprodukció szorozva a hőmérséklettel a következő:

$$T \sigma_s = (t^{ij} - (t_s)^{ij}) \dot{\epsilon}_{ij} - \xi_{ij} \dot{\xi}^{ij} \geq 0. \quad (45)$$

4.3. Vezetési (konstitutív) egyenletek. A klasszikus irreverzibilis termodinamikában az entrópiaprodukció segítségével termodinamikai erőket és áramokat azonosítunk, és közöttük lineáris kapcsolatot feltételezünk. Ezzel megoldjuk az egyenlőtlenséget. Ahogy már az előző fejezetben is említettük, az áramok és erők megkülönböztetése nem önkényes és nincs benne fizikai feltevés, inkább matematikai jellegű. A termodinamikai erők az állapot ismert függvényei, az áramok pedig konstitutív - azaz meghatározandó - függvényeket tartalmaznak. Jelen esetben a feszültség és a belső változó evolúciós egyenlete a határozatlan, tehát

$$\begin{array}{c|c|c} \text{Erő} & \dot{\epsilon}^{ij} & -\xi^{ij} \\ \hline \text{Áram} & t^{ij} - (t_s)^{ij} & \xi^{ij} \end{array}$$

A lineáris vezetési egyenletek ezek után a következők lesznek:

$$t^{ij} - (t_s)^{ij} = L_{11}^{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} - L_{12}^{ijkl} \xi_{kl}, \quad (46)$$

$$\xi^{ij} = L_{21}^{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} - L_{22}^{ijkl} \xi_{kl}. \quad (47)$$

Itt L_{11} , L_{12} , L_{21} és L_{22} negyedrendű csatolási mátrixok, amik izotrop esetben 2-2 skalár együttthatót tartalmaznak a szimmetrikus tenzor deformáció és belső változó gömbi és deviatorikus részének megfelelően. Ekkor a fenti egyenletrendszer is két független részre esik szét:

$$t^i_i - (t_s)^i_i = m_{11} \dot{\epsilon}^i_i - m_{12} \xi^i_i, \quad (48)$$

$$\xi^i_i = m_{21} \dot{\epsilon}^i_i - m_{22} \xi^i_i, \quad (49)$$

$$\tilde{t}^{ij} - (\tilde{t}_s)^{ij} = k_{11} \dot{\tilde{\epsilon}}^{ij} - k_{12} \tilde{\xi}^{ij}, \quad (50)$$

$$\tilde{\xi}^{ij} = k_{21} \dot{\tilde{\epsilon}}^{ij} - k_{22} \tilde{\xi}^{ij}. \quad (51)$$

A belső változók általában kiküszöbölhetők a fenti (46)–(47) illetve a (48)–(49) egyenletrendszerekből. Külön-külön a deviatorikus és a térfogati részekre egy-egy ún. tehetetlenségi Poynting-Thomson-modellt eredményeznek [30, 21].

Ennek megfelelően az entrópiaprodukció is kvadratikus lesz a termodinamikai erőkben vagy áramokban, és a skalár és másodrendű szimmetrikus nyomnélküli tenzorok szétcsatolódnak:

$$\begin{aligned} T\sigma_s = & m_{11}(\dot{\epsilon}^i_i)^2 - (m_{12} + m_{21})\dot{\epsilon}^i_i \xi^j_j + m_{22}(\xi^i_i)^2 + \\ & + k_{11}\dot{\tilde{\epsilon}}^{ij}\dot{\tilde{\epsilon}}_{ij} - (k_{12} + k_{21})\dot{\tilde{\epsilon}}^{ij}\dot{\tilde{\xi}}_{ij} + k_{22}\dot{\tilde{\xi}}^{ij}\dot{\tilde{\xi}}_{ij}. \end{aligned} \quad (52)$$

A továbbiakban egy térdimenziós tárgyalásra térünk át.

4.4. Közönséges reológia - avagy reológia homogén termodinamikai testekre. Egy térbeli dimenziós eset többféleképpen is adódik a fenti egyenletekből. Egytengelyű terhelés, vagy csak a térfogatváltozás tárgyalása is egyetlen skalár egyenletre vezet. Ebben az esetben az eredő egyenlet együttthatói a fenti anyagi paraméterek kombinációi lesznek. Ha az impulzusmérleget nem vesszük figyelembe, akkor a termodinamikai egyenletek csak az időbeli változásokra szorítkozva közönséges differenciálegyenletek, homogén kontinuumra vonatkoznak, ezért ezek az esetek a közönséges, avagy a homogén testekre vonatkozó termodinamikának — a klasszikus termosztatika nemegyensúlyi kiterjesztésének — részét képezik [35].

Összefoglalva a fenti egyenleteket azt kapjuk, hogy az energiadisszipáció

$$T\sigma_s = (t - \partial_\epsilon e_r) \dot{\epsilon} - \partial_\xi e_r \dot{\xi} \geq 0, \quad (53)$$

ahol eddigi jelöléseinken rövidítve $e_e = e_{rug} + e_{din}$ a rugalmas és a belső változóhoz köthető energia összege:

$$e_e = G \frac{\epsilon^2}{2} + \bar{G} \frac{\xi^2}{2}. \quad (54)$$

Itt G a megfelelő rugalmassági állandó, pl. a Young-modulus, ha egytengelyű terhelést tekintünk. \bar{G} a belső változóra vonatkozó analóg anyagi paraméter. A kontinuumegyenletekben nem vezettük be, mert csak reológiai jelenségeknél nincs jelentősége. A képlékenységi analóg tárgyalásakor azonban lényeges lesz, mert ekkor a belső változónak konkrét fizikai jelentése van: képlékeny deformációként azonosítjuk. A termodinamikai erők és áramok (53) alapján

Erő	$\dot{\epsilon}$	$-\bar{G}\xi$
Áram	$t^v = t - G\epsilon$	$\dot{\xi}$

A lineáris vezetési egyenletek ezek után a következők lesznek:

$$t^v = l_1 \dot{\epsilon} - l_{12} \bar{G} \dot{\xi}, \quad (55)$$

$$\dot{\xi} = l_{21} \dot{\epsilon} - l_2 \bar{G} \dot{\xi}. \quad (56)$$

A belső változót kiküszöbölve a fenti (55)-(56) egyenletrendszerből:

$$\sigma + \tau \dot{\sigma} = 2\eta \tau_d \ddot{\epsilon} + 2\eta \dot{\epsilon} + 2G\epsilon, \quad (57)$$

ahol $\tau = (\bar{G}l_2)^{-1}$, $2\eta\tau_d = l_1(\bar{G}l_2)^{-1}$, $2\eta = (l_1l_2 - l_{12}l_{21})l_2^{-1}$. Ez az ún. tehetetlenségi Poynting-Thomson-modell, a minimális modell, amely egyszerre képes számot adni a relaxációról és a kúszásról is, illetve figyelembe veszi az anyagi tehetetlenséget. Figyelemre méltó, hogy egyetlen dinamikai változós, minimális termodinamikai elmélet ezt adja alapmodellként.

Vegyük észre, hogy a fenti modellnek a kereszteffektusok jelenléte, azaz l_{12} és l_{21} nem nulla volta lényeges elemét képezi két kiemelendő szempontból is. Egyrészt ha nincs kereszteffektus, akkor (55)-(56) két független egyenlet, a belső változónak nincs hatása a mechanikai jelenségekre, és nem küszöbölhető ki. Viszont (57)-ben, a kiküszöbölés után, a kereszteffektusok együtthatóit már nullának tekinve is érvényes egyenletünk van. Másrészt, l_{12} és l_{21} viszonyáról semmit sem feltételeztünk, szándékosan. A szimmetrikus vagy antiszimmetrikus vezetési mátrixok kérdése egyrészt a teljes termodinamikai képlékenységlelméletnek is egy kulcskérdése (sokak szerint ez dönti el, hogy a képlékenységi modell kapcsolt-e, vagy nem [7]), illetve az (55)-(56) vezetési egyenletekben \bar{G} értékének megváltoztatása mindig elronthat bármilyen szimmetriára vonatkozó felvetést. Ez az anyagi paraméter ráadásul nem határozható meg csupán mechanikai mérésekkel, mert a belső változóra csak következményeiben, (57) paramétereinek meghatározásából szerezhetnénk információt. Ha pedig \bar{G} értékét egységnek választjuk és csak szimmetrikus, vagy antiszimmetrikus vezetési együtthatókat feltételezünk, akkor szembesülünk azzal, hogy modellünk nem jó a tapasztalatok egy részére ([27] p98). Másrészt viszont csak a vezetési mátrix szimmetrikus része jelent disszipációt, és annak antiszimmetrikus - "giroszkópikus" - része nem ad járulékot az entrópiaprodukcióhoz. Azaz, általános vezetési mátrixok használata lehetőséget teremt a termodinamikai leírás érvényességi körének jelentős kiterjesztésére is. Erre vonatkozóan fontos példát jelent, hogy a Maugin-féle dinamikai szabadsági fokok és a belső változók elmélete csak az általános esetben egyesíthető [33]. Megjegyezzük, hogy az Onsager által adott bizonyítás a reciprocitási relációkra csak tiszta mikroszkopikus háttér esetén érvényes, ezért fenti megállapításunk nincs ellentmondásban vele.

A vezetési együtthatók mátrixának szimmetriája az úgynevezett disszipációs potenciálok létezésének is szükséges és elégséges feltétele. A disszipációs potenciál a termodinamikai erőknél (vagy áramoknak) olyan függvénye, amelynek parciális deriváltjaként kapható meg a fenti (55)–(56) vezetési egyenletek jobb oldala. Jelen esetben, ha $l_{12} = l_{21}$, akkor

$$\Phi(\dot{\epsilon}, -\bar{G}\xi) = l_1 \frac{\dot{\epsilon}^2}{2} - l_{12} \dot{\epsilon} \bar{G}\xi + l_2 \frac{(\bar{G}\xi^2)}{2}, \quad (58)$$

hiszen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\epsilon}} &= l_1 \dot{\epsilon} - l_{12} \bar{G}\xi, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial (-\bar{G}\xi)} &= l_{12} \dot{\epsilon} - l_2 \bar{G}\xi. \end{aligned}$$

A disszipációs potenciálok a kapcsolt képlékenység termodinamikai elméletében kulcsfontosságúak, a folyásfüggvény, illetve a képlékeny potenciál szerepét játsszák.

5. KÉPLÉKENYSÉG TERMODINAMIKAI ELMÉLETE - KIS DEFORMÁCIÓK

A termodinamikai képlékenység is egy belső változós elmélet, ahol a belső változót azonnal fizikai, kinematikai jelentéssel felruházva, képlékeny deformációként vezetik be. Egy mechanikai leírásban nincs is sok más választásunk, mechanikai fogalmakkal kell megragadnunk a jelenségeket. A képlékenység oka valamilyen belső szerkezeti változás az anyagban (pl. diszlokációk mozgása, de a szemcsék átrendeződése is ide tartozhat), amely megváltoztatja a mechanikai erőket, az anyag belső feszültségviszonyait. Azaz, a jelentkező deformáció csak következmény, nem világos, hogy milyen feltételekkel jelentheti alapját a modellezésnek. Ráadásul a fizikai kép, a változó kinematikai jelentése is lényeges, ennek felületes kezelése következtelenne teszi a képlékenységlelméleteket, ahogy ezt a nagy alakváltozások esetére Bertram megmutatta [36]. Egy termodinamikai leírásban - általánosabb alapokon, a releváns fizikai mennyiséget belső változóként bevezetve - vizsgálhatóbb a képlékenységre vezető feltételrendszer.

Ez a belső változó azonban reológiai társától eltérően nem tekinthető egyúttal Verhás-féle dinamikai szabadsági foknak (a Verhás-féle dinamikai szabadsági fok olyan speciális belső változó, amely termodinamikai egyensúlyban nulla, azaz a hozzá tartozó intenzív mennyiség arányos magával a változóval). Ugyanis a szóban forgó szerkezeti változások maradandóak lehetnek, a külső hatás megszűnésekor sem enyésznek el. Éppen ezért a képlékenység tárgyalásakor már sztatikai szinten is az előző fejezet reológiai modelljétől eltérő feltevéseket teszünk a belső változó és a deformáció viszonyára, elképzelve, hogy a belső változó változtatja, adott feltételekkel csökkenti a feszültséget, illetve végső soron a tárolt rugalmas energiát. Ebből következően az e_B belső energia is különbözik a reológiai tárgyalásban bevezetett (37) formától:

$$e_B = e - \frac{v^2}{2} - e_p(\epsilon^{ij}, \xi^{ij}). \quad (59)$$

A sztatikus mechanikai feszültséget az előző rugalmas-reológiai esethez hasonlóan, az e_p energia deformáció szerinti deriváltjaként határozzuk meg:

$$(t_s)^{ij} = \frac{\partial e_p}{\partial \epsilon_{ij}}. \quad (60)$$

Feltételezzük, hogy a belső változó megváltozása a deformáció változásához képest ellentétesen hat a feszültségre. A deformáció hatását a feszültségre a rugalmassági modulussal jellemezzük, azaz nemlineáris esetben a feszültségnek a deformáció szerinti deriváltjával. A feszültségnek a belső változó szerinti deriváltja hasonló negyedrendű tenzor lesz, ezt a képlékeny deformációhoz tartozó rugalmassági modulusnak tekintjük. A fenti követelmény alapján a kétfajta rugalmassági tenzor arányos kell legyen, méghozzá negatív együtthatóval, azaz

$$\frac{\partial t^{ij}}{\partial \epsilon_{kl}} + A_{mn}^{kl} \frac{\partial t^{ij}}{\partial \xi_{mn}} = 0, \quad (61)$$

ahol A_{mn}^{kl} szimmetrikus és pozitív definit abban az értelemben, hogy $A_{mn}^{kl} = A_{kl}^{mn}$, továbbá $z_{ij} A_{kl}^{ij} z^{kl} \geq 0$ minden $z_{ij} \neq 0$ -re. Ezenkívül $A_{mn}^{kl} = A_{nm}^{kl}$ és $A_{mn}^{kl} = A_{mn}^{lk}$ a deformáció és a belső változó szimmetrikussága miatt. Ha A_{mn}^{kl} állandó, akkor a (61) feltétel úgy is felfogható, hogy a deformációval arányos a belső változó, azaz

$$\epsilon^{kl} = A_{mn}^{kl} \xi^{mn},$$

hiszen (61) megoldása alapján $t^{ij}(\epsilon^{kl} - A_{mn}^{kl} \xi^{mn})$. Ezért, a sztatikus feszültség előbbi (60) definíciója szerint az e_{pla} rugalmas-képlékeny energia

$$e_{pla}(\epsilon^{ij}, \xi^{ij}) = e_{rug}(\epsilon^{ij} - A_{mn}^{ij} \xi^{mn}) + e_{din}(\xi^{ij}).$$

Vagyis a reológiai esethez teljesen hasonló formát kaptunk azzal a különbséggel, hogy a deformálódást a belső változó növekedése csökkentheti. Másként fogalmazva, a rugalmas energia csak a deformáció rugalmas részétől függ, amely a valódi és a képlékeny deformáció különbségeként áll elő. Bevezethetünk tehát egy új változót:

$$(\epsilon_p)^{ij} = A_{mn}^{ij} \xi^{mn}.$$

Ez a változó pedig már képlékeny deformációként értelmezhető, visszkapjuk (1)-et. Segítségével a fenti rugalmas-képlékeny energia formája

$$e_{pla}(\epsilon^{ij}, (\epsilon_p)^{ij}) = e_{rug}(\epsilon^{ij} - (\epsilon_p)^{ij}) + e_{din}((\epsilon_p)^{ij}). \quad (62)$$

A továbbiakban feltételezzük, hogy mind a rugalmas, mind a dinamikai energia kvadratikusan és izotróp függvénye változóinak, azaz

$$e_{rug}(\epsilon^{ij} - (\epsilon_p)^{ij}) = \frac{\lambda}{2} (\epsilon_i^i - (\epsilon_p)_i^i)^2 + \mu (\tilde{\epsilon}^{ij} - (\tilde{\epsilon}_p)^{ij}) (\tilde{\epsilon}_{ij} - (\tilde{\epsilon}_p)_{ij}), \quad (63)$$

$$e_{din}((\epsilon_p)^{ij}) = \frac{\bar{\lambda}}{2} ((\epsilon_p)_i^i)^2 + \bar{\mu} (\tilde{\epsilon}_p)^{ij} (\tilde{\epsilon}_p)_{ij}. \quad (64)$$

Itt hullámmal az adott szimmetrikus másodrendű tenzor nulla nyomú részét jelöltük az eddigiekhez hasonlóan, λ és μ a rugalmas Lamé-állandók, $\bar{\lambda}, \bar{\mu}$ pedig a képlékeny (keményedő) tartományban érvényes analóg anyagi paraméterek.

A termodinamikai leírás ezek után is teljesen analóg a reológiai esettel. Az energia járulékeinak azonosítása után az entrópia csak a belső energián keresztül függ az összdeformációtól és a képlékeny deformációtól: $s(e_b, \epsilon^{ij}, (\epsilon_p)^{ij}) = \hat{s}(e_B)$. Ennek megfelelően a Gibbs-reláció a következő:

$$de_B = T d\hat{s} + (t_s)_{ij} d\epsilon^{ij} + (t_p)_{ij} d(\epsilon_p)^{ij}, \quad (65)$$

ahol $(t_p)^{ij} = \frac{\partial e_{pla}}{\partial (\epsilon_p)^{ij}}$ a képlékeny feszültség. Az eddigieket összefoglalva az intenzív mennyiségeket a fenti Gibbs-reláció, illetve (59) és (62) alapján a következőképpen

adhatjuk meg:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{s}}{\partial e_B} &= \frac{\partial s}{\partial e_b} = \frac{1}{T}, \\ \frac{\partial s}{\partial \epsilon^{ij}} &= -\frac{1}{T} \frac{\partial e_{pla}}{\partial \epsilon^{ij}} = -\frac{1}{T} \frac{\partial e_{rug}}{\partial \epsilon^{ij}} = -\frac{(t_s)^{ij}}{T}, \\ \frac{\partial s}{\partial (\epsilon_p)^{ij}} &= -\frac{1}{T} \frac{\partial e_{pla}}{\partial (\epsilon_p)^{ij}} = -\frac{(t_p)^{ij}}{T}.\end{aligned}$$

Ha a deformáció nem nulla, akkor belső változónk értéke termodinamikai egyensúlyban nem feltétlen nulla. Ezért a belső változó nem lesz Verhás-féle dinamikai szabadsági fok, ellentétben a reológiai esettel. Az előző fejezet számításait megismételve végülis az entrópiatermelés következő lesz:

$$T\sigma_s = (t^{ij} - (t_s)^{ij}) \dot{\epsilon}_{ij} - (t_p)^{ij} (\dot{\epsilon}_p)_{ij} \geq 0. \quad (66)$$

Ezért aztán, szem előtt tartva, hogy mind a sztatikus, mind a képlékeny feszültség ismert függvénye az alapváltozóknak, a megfelelő termodinamikai erők és áramok a következők lesznek:

Erő	$\dot{\epsilon}^{ij}$	$-(t_p)^{ij}$
Áram	$t^{ij} - (t_s)^{ij}$	$(\dot{\epsilon}_p)_{ij}$

A lineáris vezetési egyenletek ezek után

$$t^{ij} - (t_s)^{ij} = L_{11}^{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} - L_{12}^{ijkl} (t_p)_{kl}, \quad (67)$$

$$(\dot{\epsilon}_p)^{ij} = L_{21}^{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} - L_{22}^{ijkl} (t_p)_{kl}. \quad (68)$$

A fenti egyenletrendszer izotrop esetben érvényes változata is nagyon hasonló, mint az előző fejezetben:

$$t^i_i - (t_s)^i_i = m_{11} \dot{\epsilon}^i_i - m_{12} (t_p)^i_i, \quad (69)$$

$$(\dot{\epsilon}_p)^i_i = m_{21} \dot{\epsilon}^i_i - m_{22} (t_p)^i_i, \quad (70)$$

$$\tilde{t}^{ij} - (\tilde{t}_s)^{ij} = k_{11} \dot{\tilde{\epsilon}}^{ij} - k_{12} (\tilde{t}_p)^{ij}, \quad (71)$$

$$(\dot{\tilde{\epsilon}}_p)^{ij} = k_{21} \dot{\tilde{\epsilon}}^{ij} - k_{22} (\tilde{t}_p)^{ij}. \quad (72)$$

A belső változók kiküszöbölése most is lehetséges, ha feltételezzük, hogy a vezetési együtthatók állandóak.

Ez az egyenletrendszer azonban még nem képlékenységi elmélet, a képlékeny viselkedés egy fontos eleme, maga a képlékenységi feltétel és határ sehol sem jelenik meg benne. A megoldásai is mutatják, hogy eddigi feltételeink sem tartalmazzák rejtetten. A képlékeny deformációnak ugyanis megvan az a tulajdonsága, amit a bevezetésben említett összes elmélet alapul vesz, hogy csak bizonyos feszültség-, energia-, vagy egyéb feltétel teljesülése esetén kezd változni. A viselkedés a tapadási súrlódáshoz hasonló, a termodinamikai képlékenységi elméletének mechanizmusát alkalmaztuk a második fejezetben. Ha a képlékenységi csak deviatorikus feszültség hatására lép fel, mint a fémekben, akkor az ott leírt gondolatmenet alapján reológiai motivációjú egyenletrendszerünk módosítása kézenfekvő. Legyen (72)-ben a k_{22} együttható nemlineáris és (31) szerint függjön a termodinamikai erőttől, jelen esetben $(t_p)^{ij}$ -től. Természetesen a kontinuummodell bonyolultabb egyenletei több

kérdést nyitva hagynak, de az egyik legegyszerűbb olyan változtatás, amelytől képlékeny viselkedést várhatunk, a következő:

$$k_{22} = \frac{k_2}{1 + \frac{k_2}{\sigma_c} |\tilde{t}_p|}. \quad (73)$$

Itt $|\tilde{t}_p| = \sqrt{(\tilde{t}_p)^{ij}(\tilde{t}_p)_{ij}}$ a képlékeny feszültség deviatorikus részének abszolút értéke. Ez a képlékenységi modellünk kulcsfontosságú utolsó feltevése.

A kapott vezetési egyenletekkel az entrópiaprodukció

$$T\sigma_s = m_{11}(\dot{\epsilon}_i^i)^2 - (m_{12} + m_{21})\dot{\epsilon}_i^i(t_p)_i^i + m_{22}(t_p)_i^i{}^2 + \\ k_{11}\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}^{ji} - (k_{12} + k_{21})\dot{\epsilon}_{ij}(\tilde{t}_p)^{ij} + \frac{k_2}{1 + \frac{k_2}{\sigma_c} |\tilde{t}_p|} |\tilde{t}_p|^2 \geq 0. \quad (74)$$

Az utolsó tag figyelemre méltó. Ugyanis, ha $k_2|\tilde{t}_p|/\sigma_c \gg 1$ akkor a $\sigma_c|\tilde{t}_p|$ formára egyszerűsödik, ekkor a többivel ellentétben nem kvadratikusan. A következő fejezetben látni fogjuk, hogy ez felel meg az ideális képlékenységnak. A termodinamikai áram abszolút értékét tartalmazó entrópiaprodukció — a kvadratikusan forma helyett — a termodinamikai képlékenységlelmélet védjegyszerű jellemzője. Ha a fenti vezetési mátrix szimmetrikus, akkor az entrópiaprodukcióból könnyen megadhatjuk a vonatkozó disszipációs potenciált, amit az első fejezetben mondtak alapján a képlékeny potenciállal azonosíthatunk:

$$\Phi(\dot{\epsilon}_i^i, \dot{\epsilon}^{ij}, (t_p)_i^i, (\tilde{t}_p)^{ij}) = \frac{m_{11}}{2}(\dot{\epsilon}_i^i)^2 - m_{12}\dot{\epsilon}_i^i(t_p)_i^i + \frac{m_{22}}{2}(t_p)_i^i{}^2 + \\ \frac{k_{11}}{2}\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}^{ji} - k_{12}\dot{\epsilon}_{ij}(\tilde{t}_p)^{ij} + \sigma_c|\tilde{t}_p| - \frac{\sigma_c^2}{k_2} \ln\left(1 + \frac{k_2}{\sigma_c} |\tilde{t}_p|\right) \quad (75)$$

A disszipációs potenciál egyes változói szerinti deriváltak a (69)–(72) egyenletek jobb oldalai adják.

A továbbiakban néhány nagyon egyszerű esetben szemléltetni fogjuk, hogy valóban képlékenységi elméletet adtunk meg, méghozzá egy dinamikus, kinematikai keményedő és disszipatív képlékenységi elméletet, a viszkoelasztoplaszticitás talán legegyszerűbb modelljét.

5.1. Közöséges képlékenység - képlékenység homogén testekre. Hasonlóan a reológiai esethez, a homogén képlékeny test egyenletei is többféle terhelés hatására jöhetnek létre.

A rugalmas-képlékeny energia kvadratikusan formájában, azaz (62) az egydimenziós homogén esetben a következő lesz:

$$e_{pla}(\epsilon, \epsilon_p) = G \frac{(\epsilon - \epsilon_p)^2}{2} + \bar{G} \frac{\epsilon_p^2}{2}. \quad (76)$$

Ennek megfelelően a sztatikus feszültség és képlékeny feszültség

$$\frac{\partial e_{pla}}{\partial \epsilon} = G(\epsilon - \epsilon_p), \\ \frac{\partial e_{pla}}{\partial \epsilon_p} = G(\epsilon_p - \epsilon) + \bar{G}\epsilon_p = -G\epsilon + (G + \bar{G})\epsilon_p.$$

A rugalmas-képlékeny energiafüggvény konvex, ha G és \bar{G} pozitív. Emlékeztünk, hogy ez a termosztatikai kép interpretálja belső változónkat képlékeny deformációként, a két állandót pedig a rugalmas és a keményedési modulusként (tehát a $\bar{G} = 0$ esetben lesz a képlékenységi ideális).

Az entrópiaprodukció (66) formulája változatlan marad:

$$T\sigma_s = \left(t - \frac{\partial e_{pla}}{\partial \epsilon}\right) \dot{\epsilon} - \frac{\partial e_{pla}}{\partial \epsilon_p} \dot{\epsilon}_p \geq 0. \quad (77)$$

A termodinamikai erők és áramok pedig a termosztatikai és a képlékeny feszültségekre bevezetett $t_s = \frac{\partial e_{pla}}{\partial \epsilon}$ és $t_p = \frac{\partial e_{pla}}{\partial \epsilon_p}$ jelölésekkel

$$\begin{array}{c|c|c} \text{Erő} & \dot{\epsilon} & -t_p \\ \hline \text{Áram} & t - t_s & \dot{\epsilon}_p \end{array}.$$

A vezetési egyenletek ezek után a következők

$$(t - t_s) = l_1 \dot{\epsilon} - l_{12} t_p, \quad (78)$$

$$\dot{\epsilon}_p = l_{21} \dot{\epsilon} - l_2 t_p. \quad (79)$$

Ezeket most átranszformáljuk az úgynevezett vegyes erő-áram reprezentációba [37]. Az átrendezés a szigorúan lineáris esetben (konstans és invertálható vezetési mátrix) ekvivalens az előző fejezet reprezentációjával [38, 39]:

$$\dot{\epsilon} = l_1^{-1}(t - t_s) - l_1^{-1}l_{12}t_p = \hat{l}_1(t - t_s) + \hat{l}_{12}t_p, \quad (80)$$

$$\dot{\epsilon}_p = l_1^{-1}l_{21}(t - t_s) + (-l_2 + l_1^{-1}l_{12}l_{21})t_p = \hat{l}_{21}(t - t_s) + \hat{l}_2t_p. \quad (81)$$

A teljes nemlineáris transzformáció helyett viszont a nemlinearitást most más, a képlékenységi irodalomban hagyományos módon, (29)-el analóg formában fogjuk a számításokban használni. Tegyük fel tehát, hogy az \hat{l}_2 együttható speciális. Egyrészt tartalmaz egy konstans, reológiai tagot, amely (57) szerint a relaxációs és disszipatív hatásokért lesz felelős. Másrészt, ha ez a konstans tag nulla, akkor a képlékeny deformációhoz tartozó termodinamikai intenzív paraméter $t_p = \frac{\partial e_{pla}}{\partial \epsilon_p}$ - jelen esetben egyúttal termodinamikai erő - csak a képlékeny deformáció *előjelét* képes meghatározni, nagyságát nem. Azaz feltételezzük, hogy

$$\hat{l}_2 = |\dot{\epsilon}_p|/\sigma_c + l, \quad (82)$$

ahol l és σ_c pozitív állandók. Látni fogjuk, hogy σ_c a folyási határfeszültség szerepét játssza. Az $\hat{l}_1, \hat{l}_{12}, \hat{l}_{21}, l$ vezetési együtthatókra a nemnegatív entrópiaprodukcióból következő szokásos termodinamikai egyenlőtlenségek érvényesek. Látni fogjuk, hogy ez a fajta - termodinamikailag következetlen, de a képlékenységtanban szokásos - nemlinearitás ugyanolyan hatást eredményez, mint amit a tapadási súrlódás kapcsán már tapasztaltunk: a képlékeny deformáció csak egy feszültségküszöb átlépése után kezd növekedni.

Az entrópiaprodukció, illetve az energia disszipáció megfelelő tagja most sem kvadrátikus, hanem $|\dot{\epsilon}_p|$ -vel arányos, ha $l = 0$. Ez a vegyes reprezentáció miatt nem egészen nyilvánvaló, mert ha (77)-be egyszerűen visszahelyettesítjük a fenti vezetési egyenleteket, kvadrátikus formát kapunk. Teljes áramreprezentációt választva, azaz a termodinamikai erőkkel kifejezve a termodinamikai áramokkal és behelyettesítve az entrópiaprodukcióba nem keveredik az \hat{l}_2 vezetési együttható $\dot{\epsilon}_p$ függése a hozzá tartozó termodinamikai erővel. Ez a következmény - vagyis, hogy a disszipáció a képlékeny deformáció időderiváltjának elsőrendű homogén függvénye - a termodinamikai képlékenységi elméletének kiindulópontja szokott lenni.

A vezetési együtthatók tulajdonságait kidomborító tárgyalásunk arra mutat rá, hogy itt a második főtételek egyenlőtlenségének egy olyan megoldásáról van szó, amely az irreverzibilitás egy, a megszokottól eltérő, új módját reprezentálja. A lineáris vezetési együtthatók a sűrűlódásos, diffúziós, relaxációs jelenségekben megnyilvánuló disszipációt jellemzik, a tapadási sűrűlódásos jellegűek pedig hiszterézises jelenségekben jelentkező irreverzibilitás mechanizmusát mutatják meg.

A képlékenység elméletének alapfeltevése, hogy a képlékeny deformáció csak egy bizonyos feszültség felett lép fel. A termodinamikai elmélet szépsége, hogy ezt a viselkedést a klasszikus képlékenységnél mélyebb szinten modellezi, mivel nem közvetlenül a tapasztalt következményeket, hanem az okokat próbálja matematikailag megragadni.

5.2. Megoldások. A megoldandó differenciálegyenlet-rendszer tehát a fentiek alapján az időderiváltak kiküszöbölésével adódik:

Ha $\dot{\epsilon}_p > 0$, akkor

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon} &= \hat{l}_1 \left(t - \frac{\partial e_{pla}}{\partial \epsilon} \right) + \hat{l}_{12} \frac{\partial e_{pla}}{\partial \epsilon_p} = \hat{l}_1(t - G(\epsilon - \epsilon_p)) + \hat{l}_{12}(-G\epsilon + (G + \bar{G})\epsilon_p) \\ \dot{\epsilon}_p &= \frac{\hat{l}_{12} \left(t - \frac{\partial e_{pla}}{\partial \epsilon} \right) + l \frac{\partial e_{pla}}{\partial \epsilon_p}}{1 + \sigma_c^{-1} \frac{\partial e_{pla}}{\partial \epsilon_p}} = -\sigma_c l + \frac{\hat{l}_{12}(t - G(\epsilon - \epsilon_p)) + \sigma_c l}{1 + \sigma_c^{-1}(-G\epsilon + (G + \bar{G})\epsilon_p)}.\end{aligned}\quad (83)$$

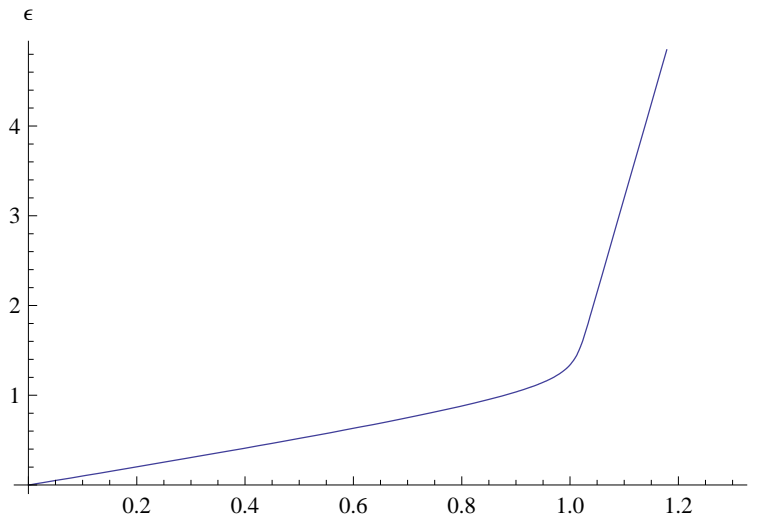
Ha $\dot{\epsilon}_p \leq 0$, akkor

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon} &= \hat{l}_1 \left(t - \frac{\partial e_{pla}}{\partial \epsilon} \right) + \hat{l}_{12} \frac{\partial e_{pla}}{\partial \epsilon_p} = \hat{l}_1(t - G(\epsilon - \epsilon_p)) + \hat{l}_{12}(G\epsilon - (G + \bar{G})\epsilon_p) \\ \dot{\epsilon}_p &= \frac{\hat{l}_{12} \left(t - \frac{\partial e_{pla}}{\partial \epsilon} \right) + l \frac{\partial e_{pla}}{\partial \epsilon_p}}{1 - \sigma_c^{-1} \frac{\partial e_{pla}}{\partial \epsilon_p}} = \sigma_c l + \frac{\hat{l}_{12}(t - G(\epsilon - \epsilon_p)) - \sigma_c l}{1 - \sigma_c^{-1}(-G\epsilon + (G + \bar{G})\epsilon_p)}.\end{aligned}\quad (84)$$

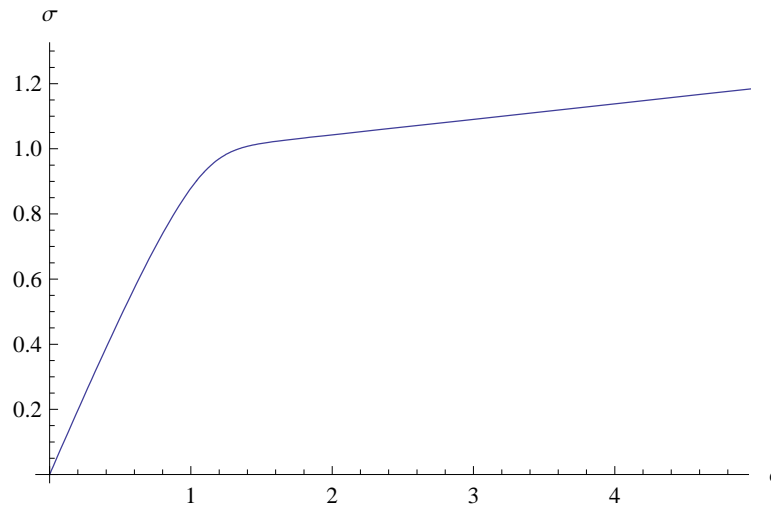
Vagyis, attól függően, hogy a képlékeny deformáció növekszik, vagy csökken, a σ_c előtti előjelet megváltoztatjuk az (83)-(84) egyenletrendszerben. Az itt tárgyalt homogen esetben a Poynting-Thomson-modellhez hasonlóan ϵ_p akár ki is kiküszöbölhető. A (83)-(86) egyenletekkel egy reológiai-képlékeny Poynting-Thomson-testet adtunk meg feszültségi (Tresca) típusú képlékenységi feltétellel.

Tekintsünk először egy mechanikai egyensúlyi esetet, amikor nincs viszkozitás, a feszültség megegyezik a termosztatikai feszültséggel, azaz $t = t_s = \frac{\partial e_{pla}}{\partial \epsilon}$, a viszkozus feszültség nulla. Legyen a felterhelés sebessége $v = 1$, a határfeszültség $\sigma_c = 1$, a további paraméterek értékei pedig $l = 0.05$, $G = 1$ és $\bar{G} = 0.05$ $\epsilon(0) = 0$. Ekkor a deformáció időfüggése az 6. ábrán, a feszültség deformációfüggése pedig a 7. ábrán látható. Az l képlékenységi paraméter szerepét a 8 ábrán szemléltetjük, ahol $l = 0.01, 0.1, 1$. Itt a kisebb paraméter élesebb folyáshatárt jelent. l és \hat{l}_1 szerepe tulajdonképpen hasonló, ha együtt lépnek fel. Nagy \hat{l}_1 és kis l eredményez éles képlékeny átmenetet.

A fenti egyenletrendszer egy lineárisan kinematikai keményedési modell, ahogy azt a 4. ábra mutatja. Itt $\sigma_c = 0.5$ és $t = 0.6$ -nál a terhelési sebesség előjelet vált. A színváltások a képlékeny deformáció monoton változásának szakaszait jelzik, amikor a differenciálegyenletben a megfelelő tag előjelet vált. Megfigyelhető a "ratcheting" jelensége is, bár itt csak egyetlen ciklust ábrázoltunk.



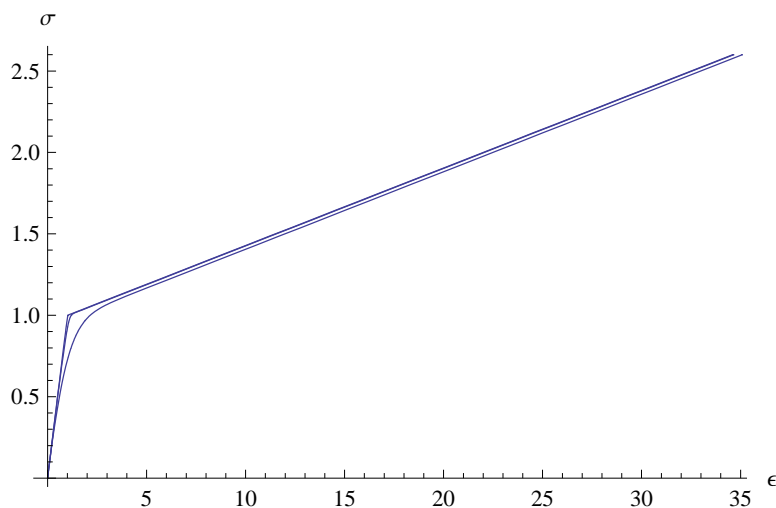
6. ábra. Mechanikai egyensúly, a deformáció időfüggése



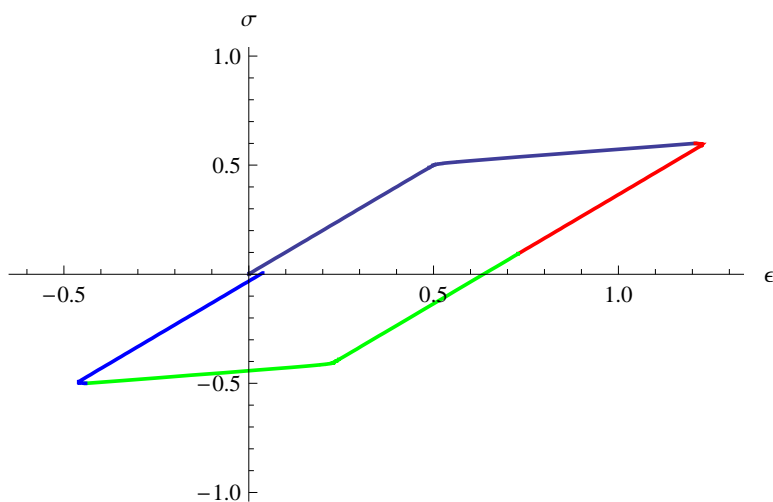
7. ábra. Mechanikai egyensúly, a feszültség deformációfüggése

6. KÖVETKEZTETÉSEK ÉS MEGJEGYZÉSEK

A képlékenységtanba disszipációt is bevezető elméletek általában csak a Kelvin-Voigt-testet tartalmazzák, azaz csak a viszkózus hatásokat képesek modellezni. Maugin ugyan említi, hogy a relaxációs hatásért felelős Maxwell-test is a termodinamikai elmélet része, de annak modellezésére külön belső változót vezet be [8]. Másrészt,



8. ábra. Az l paraméter szerepe ($l = 0.01, 0.1, 1$, felülről lefele).



9. ábra. Histerézis

a keményedésért és a képlékenységért felelős belső változókat is sokan különválasztják [16]. Az általunk tárgyalt modellben egyetlen belső változó modellezi a kúszási, a relaxációs és a képlékenyedési jelenségeket.

A képlékenységre vezető alapfeltevés az, hogy a vezetési egyenletek által eredményezett disszipáció nem feltétlen a klasszikus lineáris és konstans együtthatók által sugallt kvadratikussá, a termodinamikai áramokban másodrendűen homogén formájú

lehet, hanem attól eltérő, a termodinamikai áramokban elsőrendűen pozitívan homogén is. Speciálisan a belső változóhoz tartozó tagról elegendő feltételezni ezt a tulajdonságot. Az általunk itt javasolt Onsager-együttható formák erre vezetnek.

A hagyományos tárgyalásban alapfogalomként — képlékeny potenciálként és egyúttal folyásfüggvényként - használt disszipációs potenciálok létezésének feltétele a Onsager reciprocitási relációinak fennállása, azaz a szimmetrikus vezetési mátrix (pontosabban a nemlineáris Gyarmati-Li reciprocitási relációkat kell megkövetelnünk [40, 41]). Ezért egy általános tárgyalásban a belső változó időderiváltjától függő disszipációs potenciál helyett érdemes a vezetési egyenletekből kiindulni. Ez esetben vizsgálható, hogy ez az általánosítás mennyiben vezet a nem kapcsolt képlékenységek leírására.

Viszkózus, reológiai hatások regularizálják és stabilizálják, megoldhatóbbá teszik az az ideális képlékenységek egyenleteit [9]. Az egyenletek (teljes parciális differenciálegyenletek rendszer) sajátos szerkezete miatt a szokásos numerikus stabilizálási technikák (hiperbolikus kiegészítés, numerikus viszkózítás) nem működnek a képlékenységek esetén. A fenti differenciálegyenletek például $l = 0$ esetben már nem differenciálegyenletek, ezért nehezebben értelmezhetőek és tárgyalhatóak numerikusan. Tárgyalásmódunk értelmezi a képlékeny deformációval kapcsolatos irreverzibilitást, ezért klasszikus képlékenységtan elméletén túlmutató, valódi dinamikus képlékenységi feladatok esetén lehet jelentősége, mint például a képlékenyedési frontok terjedésének modellezése.

7. KÖSZÖNETMONDÁS

Köszönet Matolcsi Tamásnak, aki rávilágított a képlékenységtan elmélet működésére, Asszonyi Csabának, Fülöp Tamásnak és Fekete Tamásnak akikkel együtt még most sem gondolom, hogy ez ilyen egyszerű lenne, de akik bíznak benne, hogy már így is sok mindenre jó. A munkát az Otká K81161 pályázatával támogatta.

HIVATKOZÁSOK

- [1] C. Truesdell and W. Noll. *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1965. Handbuch der Physik, III/3.
- [2] G. Maugin. Szóbeli közlés.
- [3] Bojtár I. *Mechanikai anyagmodellek*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1988. in Hungarian.
- [4] D. Kolymbas. *Introduction to hypoplasticity*. A. A. Balkema, Rotterdam-Brookfield, 2000.
- [5] J. R. Rice. Inelastic constitutive relations for solids: an internal-variable theory and its application to metal plasticity. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 19:433–455, 1971.
- [6] H. Ziegler. *An introduction to thermomechanics*, volume 21 of *Applied mathematics and mechanics*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam-New York-Oxford, 1981.
- [7] G. A. Maugin. *The Thermomechanics of Plasticity and Fracture*. Cambridge University Press, Cambridge, etc., 1992.
- [8] G. Maugin. *The thermomechanics of nonlinear irreversible behaviors (An introduction)*. World Scientific, Singapore-New Jersey-London-Hong Kong, 1999.
- [9] M. E. Gurtin. On the plasticity of single crystals: free energy, microforces, plastic strain gradients. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48:989–1036, 2000.
- [10] H. Ziegler and C. Wehrli. On a principle of maximal rate of entropy production. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 12:229–243, 1987.
- [11] G. A. Maugin. *Material inhomogeneities in elasticity*. Chapman and Hall, London-..., 1993.
- [12] G. A. Maugin. *Nonlinear waves in elastic crystals*. Oxford University Press, Oxford-etc., 1999.
- [13] G. A. Maugin and W. Muschik. Thermodynamics with internal variables. Part I. General concepts. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 19:217–249, 1994.

- [14] G. A. Maugin. Internal variables and dissipative structures. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 15:173–192, 1990.
- [15] Asszonyi Cs. Ván P. és Szarka Z. *Izotróp kontinuumok rugalmas és képlékeny állapota*, volume 5 of *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár*. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2007. ISBN 978-963-420-932-4.
- [16] M. Jirásek and Z. P. Bažant. *Inelastic analysis of structures*. John Wiley and Sons, 2002.
- [17] Milan V. Mićunovic. *Thermodynamics of viscoplasticity*. Springer Verlag, 2009.
- [18] M. Ristinmaa and N. S. Ottosen. Viscoplasticity based on an additive split of the conjugated forces. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 17:207–235, 1998.
- [19] M. Ristinmaa and N. S. Ottosen. Consequences of dynamic yield surface in viscoplasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 37:4601–4622, 2000.
- [20] G. T. Houlsby and A. M. Puzrin. *Principles of hyperplasticity (An approach to plasticity theory based on thermodynamic principles)*. Springer, London, 2006.
- [21] Ván P. és Asszonyi Cs. Az általános törvényszerűségek. In Asszonyi Cs., editor, *Izotróp kontinuumok anyagtörvénye*, volume 3 of *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár*, chapter 2, pages 25–87. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2006.
- [22] T. S. Bíró and P. Ván. About the temperature of moving bodies. *Europhysics Letters*, 89:30001, 2010. arXiv:0905.1650v1.
- [23] E. Verlinde. On the origin of gravity and the laws of Newton. 2010. arXiv>1001.0785.
- [24] A. Ruina and R. Pratap. *Introduction to Statics and Dynamics*. Oxford University Press, Oxford, 2002.
- [25] B.N.J. Persson and A. I. Volitkin. Theory of rubber friction: Nonstationary sliding. *Physical Review B*, 65:134106, 2002.
- [26] Verhás J. White area on the map of applying non-equilibrium thermodynamics. sliding friction. 2009. Fudom'09 előadás és kézirat.
- [27] J. Verhás. *Thermodynamics and Rheology*. Akadémiai Kiadó and Kluwer Academic Publisher, Budapest, 1997.
- [28] G. A. Kluitenberg. On dielectric and magnetic relaxation phenomena and non-equilibrium thermodynamics. *Physica A*, 87A:302–330, 1977.
- [29] G. A. Kluitenberg and V. Ciancio. On linear dynamical equations of state for isotropic media. *Physica A*, 93:273–286, 1978.
- [30] Verhás J. *Termodinamika és reológia*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1985.
- [31] D. Jou, J. Casas-Vázquez, and G. Lebon. *Extended Irreversible Thermodynamics*. Springer Verlag, Berlin-etc., 1992. 3rd, revised edition, 2001.
- [32] I. Gyarmati. The wave approach of thermodynamics and some problems of non-linear theories. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 2:233–260, 1977.
- [33] P. Ván, A. Berezovski, and Engelbrecht J. Internal variables and dynamic degrees of freedom. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 33(3):235–254, 2008. cond-mat/0612491.
- [34] P. Ván. Weakly nonlocal irreversible thermodynamics. *Annalen der Physik (Leipzig)*, 12(3):146–173, 2003. (cond-mat/0112214).
- [35] T. Matolcsi. *Ordinary thermodynamics*. Akadémiai Kiadó (Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences), Budapest, 2005.
- [36] A. Bertram. *Elasticity and plasticity of large deformations (An introduction)*. Springer, 2005.
- [37] Gyarmati I. *Nemegyensúlyi termodinamika*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1967.
- [38] J. Meixner. Consistency of the Onsager-Casimir reciprocal relations. *Advances in Molecular Relaxation Processes*, 5:319–331, 1973.
- [39] I. Gyarmati. *Non-equilibrium Thermodynamics /Field Theory and Variational Principles/*. Springer Verlag, Berlin, 1970.
- [40] I. Gyarmati. On the phenomenological basis of irreversible thermodynamics. *Periodica Polytechnica Ser. Chem. Engng. Budapest*, 5:219–243, 321–339, 1961.
- [41] J. C. M. Li. Persistency, pseudo-entropy and thermokinetic potential. *Physical Review*, 127:1784–1786, 1962.